1.

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1.1. Mulțimi

A.

1. Fie A mulțimea literelor din cuvântul "matematica". Precizați care din propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

a) $m \in A$; **b)** $f \in A$; **c)** $a \notin A$; **d)** $\{a, m\} \subset A$;
e) $A \subset \{a, c, e, i, m, t\}$; **f)** $\{a, m, e, t\} = \{a, e, m, t\}$; **g)** $\{e, t\} \in A$;
h) $\{a, c, e, i, m, t\} \subseteq A$; **i)** $a \subset A$; j). $\{e\} \subset A$.

2. Găsiți valoarea lui a astfel încât mulțimea $M=\{a, a+1, 2a+1, 3a\}$ să aibă patru elemente.

3. Dacă $P=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $I=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ scrieți mulțimile cu ajutorul unor proprietăți caracteristice elementelor fiecărei mulțimi.

4. Dacă $A=\{1, 2, 3\}$ și $B=\{3, 4\}$, determinați mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$, $A \Delta B$, $A \times B$, $B \times A$, $B \cup \varnothing$, $A \cap \mathbf{N}$

5. Folosind diagramele Venn-Euler, reprezentați mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$ unde $A=\{a, b, c, d\}$ și $B=\{c, d, e, f\}$.

6. Fie $A=\{x \in \mathbf{N} \mid 2^x \leq 10\}$, $B=\{y \in \mathbf{N}^* \mid y=x-1,\ x<5\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor A și B.
b) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$, $A \times B$.

7. Dacă $A=\{x \mid x \in \mathbf{N};\ \overline{12x} \vdots 2\}$, $B=\{y \mid y \in \mathbf{N};\ \overline{1y2} \vdots 3\}$, $C=\{z \mid z \in \mathbf{Z};\ \overline{52z} \vdots 4\}$, verificați dacă următoarele relații sunt adevărate: $A \subset B$, $B \subset A$, $C \subset A$, $C \subset B$, $\{2, 6\} \subseteq A-C$, $A \cap B=\{0, 6\}$, $0 \in A \cap B \cap C$, $C-A=\varnothing$, $A \cup C=A$, $(4, 3) \in A \times B$, $(4, 9) \in B \times C$.

8. Să se afle elementele mulțimilor: $A=\{x \mid x=\overline{1a7b},\ 15/x\}$, $B=\{x \in \mathbf{N} \mid x \in A,\ x<1500\}$. Câte elemente va avea mulțimea $A \times B$?

9. Fie $A=\{x \in \mathbf{N} \mid x=\overline{a12b},\ x \vdots 36\}$, $B=\{y \in \mathbf{N} \mid y=\overline{c12d},\ 45/y\}$. Calculați $(A \cup B)-(A \cap B)$.

10. a) Aflați elementele mulțimilor: $A=\{x \mid x \in \mathbf{N},\ x=3-k,\ k \in \mathbf{N}\}$, $B=\{y \mid y \in \mathbf{N},\ y=k^2-1,\ k \in \mathbf{N}^*,\ k \leq 3\}$, $C=\{z \mid z \in \mathbf{N},\ z/4\}$.

b) Determinați mulțimile: $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A-B-C$, $(A-B) \cap C$, $(A \cap B)-C$, $(A \cup B)-(A \cap C)$.

11. Se consideră mulțimea: $M=\{x \in \mathbf{N} \mid 2x+1 \leq 5\}$. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A=\{2x \mid x \in M\}$; $B=\{3x \mid x \in M\}$; $C=\{3x+1 \mid x \in M\}$.
b) $D=(A \cup B) \cap C$, $E=(A \cap C) \cup B$, $F=(A-B) \cup (B-C)$.

12. Dacă $M=\{1, 2, 3\}$, scrieți mulțimea submulțimilor lui M, P(M).

13. Dacă $A=\{a, b\}$ și $B=\{b, c, d\}$, scrieți toate submulțimile mulțimii $A \cup B$.

14. Se dă mulțimea $A=\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 5\}$. Găsiți submulțimi care au suma elementelor un număr par.

15. Ce valori poate lua x dacă mulțimea $B=\{x, 2\}$ este o submulțime a mulțimii $A=\{1, 2, 3\}$.

16. Dacă mulțimea A are 8 elemente, mulțimea B are 10 elemente iar reuniunea lor are 15 elemente, câte elemente comune conțin cele două mulțimi?

17. Dacă mulțimea A are 8 elemente, mulțimea B are 10 elemente, iar mulțimea $A \cap B$ are 3 elemente, atunci Card $(A \cup B)$=?

18. Dacă Card $(A-B)=3$, Card $(B-A)=4$, Card $(A \cap B)=2$, atunci determinați Card A, Card B, Card $(A \cup B)$.

19. Dintr-o clasă de 28 elevi, 16 elevi sunt înscriși la cercul de matematică, 21 sunt înscriși la cercul de informatică, iar 3 nu sunt înscriși la nici un cerc.

a) Câți elevi sunt înscriși numai la cercul de matematică?
b) Câți elevi sunt înscriși numai la cercul de informatică?
c) Câți elevi sunt înscriși la ambele cercuri?

20. Arătați că mulțimile: $A=\{x \in \mathbf{N} \mid (3x-2) \cdot 2^3 \cdot 2^4 : (2^2)^3 = 2\}$, $B=\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 1$ și $x \geq 1\}$ sunt mulțimi egale.

21. Dacă $\{2m^7, 3n^5, 4p^2\}=\{0, 3, 16\}$, aflați $m, n, p \in \mathbf{N}$.

22. Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:

P_1: $\{25, 3a\} \cap \{a, 5\} = \{2\}$, $(\forall) a \in \mathbf{N}$;
P_2: $\{(2 \cdot 3-3)^2;\ 5^0;\ 2^{2^3} : (2^2)^3\} = \{1, 4, 9\}$;
P_3: $\{0, 1, 2, 3, ..., 2n\} - \{0, 2, 4, ..., 2n\} = \{1, 3, 5, ..., 2n-1\}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

23. Dacă $A \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$ și Card $A=3$, aflați mulțimea A.

24. Determinaţi mulţimea A, ştiind că:
a) $A\cap\{2, 4, 5\}=\varnothing$; **b)** $\{1, 3\}\subset A$; **c)** $A-\{1, 3\}=\varnothing$.

25. Să se determine mulţimea M, ştiind că:
a) $M\cap\{1, 2, 5\}=\{1, 2\}$; **b)** $M-\{2, 3\}=\{1\}$; **c)** Card M=3.

26. Să se determine mulţimile X şi Y, ştiind că:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $X\cap Y=\{1, 5\}$; **c)** suma elementelor lui X este 8.

27. Determinaţi mulţimile X şi Y, ştiind că:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $X\cap Y=\{1, 2\}$; **c)** $X-Y=\{4, 5\}$.

28. Determinaţi mulţimile X şi Y, ştiind că:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $X\cap Y=\varnothing$; **c)** $X-Y=\{1, 2, 3\}$.

29. Determinaţi elementele mulţimilor A şi B care îndeplinesc simultan condiţiile:
i) $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$; **ii)** $A\cap B=\{c, e, g\}$; **iii)** $A-B=\{b, f\}$.

30. Determinaţi mulţimile X şi Y, ştiind că:
i) $X\cup Y=\{x\in \mathbf{N} \mid x<4\}$; **ii)** $(0, 2)\in X\times Y$; **iii)** $X\cap Y=\{1, 2, 3\}$.

31. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac condiţiile:
a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $A\cap B=\{1, 2\}$; **c)** $5\notin A-B$; **d)** Card A > Card B.

32. Determinaţi elementele mulţimilor A şi B, ştiind că:
1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **2)** $A\cap B=\{3, 4\}$; **3)** $A\cap\{5, 6\}=\varnothing$; **4)** $\{1, 2\}\cap B=\varnothing$.

33. Desenaţi cu ajutorul diagramelor Venn-Euler două mulţimi A şi B şi:
1) Reprezentaţi următoarele informaţii:
a) $A-B=\{1, 3\}$; **b)** $A\cap B=\{2\}$; **c)** $A\cup B=\{x \mid x\in \mathbf{N}, 1\le x<5\}$.
2) Scrieţi mulţimile A şi B ştiind că sunt satisfăcute simultan condiţiile de mai sus.

34. Determinaţi mulţimile A, B, C cu următoarele informaţii despre ele:
1) $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **2)** $A\cap B\cap C=\{3, 4\}$;
3) $5\in(B\cap C)-A$; **4)** $\{1, 2\}\cap(B\cup C)=\varnothing$.

35. Să se afle mulţimile X, Y, Z ştiind că:
a) $X\cup Y\cup Z=\{x \mid x\in \mathbf{N}^*, x<6\}$; **b)** $\{3\}\subset X\cap Y\cap Z$;
c) $X-Y=\{1, 2, 4, 5\}$; **d)** $X-Z=\{1, 2, 4, 5\}$; **e)** Y=Z.

B.

1. Fie $A=\{n, n+1, 2n+1, 3n\}$. Care sunt valorile lui $n\in \mathbf{N}$, pentru care mulţimea A are 4 elemente.

2. a) Scrieţi elementele mulţimilor: $A=\{x \mid x\in \mathbf{N}, x<5\}$, $B=\{y \mid y^2\in A, y\in \mathbf{N}\}$, $C=\{ z \mid z\in \mathbf{N}, z=x+y\}$.
b) Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
1) $A\subset B$; 2) $B\subset A$; 3) $A\subseteq C$; 4) $B\subseteq C$; 5) $C\subset B$;
6) $A\cup B\subset C$; 7) $\{5, 6\}\subset C-A$; 8) $A\cap B\cap C=\{0, 1, 2\}$.

3. Date mulţimile: $A=\{x\in \mathbf{N}^* \mid x=\text{cifră şi } x=\text{pătrat perfect}\}$, $B=\{x\in \mathbf{N}^* \mid x=\text{ultima cifră a numerelor } 3^{12}, 5^{99}, 6^{2000}\}$, $C=\{x\in \mathbf{N}^* \mid \overline{1x}=\text{număr prim}\}$:
a) Enumeraţi elementele mulţimilor date. **b)** Aflaţi cardinalul fiecărei mulţimi.
c) Determinaţi (A∩B) C.

4. Fie mulţimile: $A=\{x\in \mathbf{N} \mid \overline{27x}\,\vdots\,2\}$, $B=\{y\in \mathbf{N} \mid y=2^{n+2}-3n, n\in \mathbf{N}, n<3\}$, $C=\{z\in \mathbf{N} \mid z=\text{ultima cifră a lui } n^2, n\in \mathbf{N}\}$.
1) Găsiţi elementele mulţimilor A, B, C.
2) Calculaţi $A\cup B\cup C$; $A\cap B\cap C$; $A\cup(B\cap C)$; $(A\cup B)-C$.

5. a) Determinaţi elementele mulţimilor: $A=\{x\in \mathbf{N} \mid x=2^{2^n}, n\in \mathbf{N}^*, n<3\}$, $B=y\in \mathbf{N} \mid y^2=x, x\in A\}$, $C=\{z\in \mathbf{N} \mid z=y^2-1, y\in B\}$.
b) Aflaţi $(A\cup B)\cap \mathbf{N}$; $(A\cap B)\cup\varnothing$; $(B-A)\cup(B-C)$; $A\cup B\cap C$; $(A-B)-C$; $(A\cup B)\times C$.

6. Aflaţi numerele naturale x şi y astfel încât mulţimile $A=\{2^x, 4^{x-y}, 2^{2y}\}$ şi $B=\{2^{x-2}, 2^{4-y}, 2^{x+y}\}$ să fie egale.

7. Care sunt elementele mulţimii A ştiind că $\{a,b, c\}\subset A$, $\{a, d\}\subset A$ şi $A\subset\{a,b,c, d\}$.

8. Determinaţi mulţimea M ştiind că $A\cap M=\{7\}$ unde $A=\{x \mid x\in \mathbf{N}, x=\text{prim}, x\le 10\}$ şi $\{0, 1\}\subset A\cup M$.

9. Să se determine mulţimile X şi Y ştiind că:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $X-\{4, 5\}=\{1, 2, 3\}$; **c)** Card X=3.

10. Se dau mulţimile A şi B care verifică condiţiile: $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$ şi $A\cap B=\{3\}$. Se cere:
a) Să se determine mulţimile A şi B ştiind că A are mai multe elemente decât B.
b) În condiţiile date mulţimile A şi B pot avea acelaşi număr de elemente?

11. Determinaţi mulţimile A şi B cu următoarele proprietăţi:
a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$; **b)** Card A = Card B = 2; **c)** Dacă $x\in A$, atunci $(x+1)\in B$.

12. Găsiţi elementele mulţimilor X şi Y ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $X\cap Y=\{1, 2\}$; **c)** $X-Y\neq\varnothing$;
d) suma elementelor lui Y este un număr impar.

13. Aflaţi elementele mulţimilor A şi B care îndeplinesc condiţiile:
a) $A\cup B=\{0, 1, 2, 3\}$; **b)** $2\in B-A$; **c)** $A-B\not\subset\{1, 3\}$;
d) $B-A\not\subset\{1, 2\}$; **e)** $A\cap B\neq\varnothing$.

14. Determinaţi mulţimile X, Y, Z ştiind că:
a) $X\cup Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $Y\cap Z=\{4\}$; **c)** $X\cap Y\cap Z=\varnothing$;
d) $X-Y=\{3, 5\}$; **e)** $Y-Z=\{1, 2\}$.

15. Să se determine elementele mulțimilor X, Y, Z știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $X \cup Y \cup Z = \{a, b, c, d, e\}$; **2)** $X - Y = \{d, e\}$;
3) $X - Z = \{b, d\}$; **4)** $Y - Z = \{a, b\}$.

1.2. Numere întregi

A.

1. Efectuați:
a) $10 - \{5 + (-3) + [7-13 + (-9 + 14) - (15-13+1)]\}$;
b) $-5 - (-2) - \{(-5) - [(-7) + (-3) - (-8)] + (-5+5)\}$.

2. Efectuați:
a) $(-2)\cdot\{-15 - [(-28) : (+7) - (-12) : (-4) - (+18) : (-3)]\cdot(-10)\}$;
b) $(+12) + \{[(-16) : (-2) : (+4) - (-27) : (+9) \cdot (-2)] + (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\}$.

3. Efectuați:
a) $\{10\cdot(-1)^2 - [-3+2\cdot(-2)^3 + (-4)^2] : (-3)^0\} + 0^3\cdot(-1)^3$;
b) $(-5)\cdot(-5)^2\cdot(-5)^3 : (-5)^4 - [(-16)^2 \cdot 4^3]^2 : (-2)^{5^2} - (-5)^0\cdot(1)^5$.

4. Efectuați:
a) $|-5| + 2\cdot(-5) - \{-3 + |-4| \cdot [|-10| : |-2| - |+12| : (-3)] - |(-3)^3 : (-3)^2|\}$;
b) $|-1| \cdot 4^{15} - |-9|^{10} + |(-1)^5\cdot 5| - |(-2)^3| : |-4| + |(-2)^{30} - 3^{20}|$.

5. Calculați $x = a:b - 2c$ unde
$a = (+13)\cdot(-16) + (-17)\cdot(-16) - (-16)\cdot(-4)$; $b = -1+3-5+7-9+11-13+15$;
$c = |-5|^3 : \{14\cdot(-1)^{14} - |-2|\cdot [5 - (-2)^2 : (-2)] + 25\}$.

6. Calculați:
a) $(1^2-2^1)(2^3-3^2)(2^4-4^2)(2^5-5^2)(2^6-6^2)(2^7-7^2)$;
b) $(1^2-100)(2^2-100)(3^2-100) \ldots (11^2-100)$.

7. Comparați numerele a^{48} și b^{72}, unde:
$a = -2-2\cdot[(-3)^5 : (-3)^4 - 2] + (-5)\cdot(-5)^0$; $b = |-2|^2 + (-2)\cdot|-3| - (-2)^3\cdot 0^{2001}$.

8. Comparați numerele a și b, unde:
$a = \{[(-2^3)^4 + |4^6 - 3^{12}|] : 9^2\}^2$; $b = [27^{11} - 4^{102} : (-2)^{200} - 3^{33}]^4$.

9. Calculați m, n, p și ordonați crescător numerele: m^2, n^3, $|p|$.
a) $m = |-2| \cdot 3 + \min(-4, 5) + \max(-3, 1)$;
b) $n = 2\cdot|x| + |x-2|\cdot(-1) + |x+5| : (-2)$ pentru $x = -3$;
c) $p = [0^1 + 1^0 + (-1)^{2k+1} - (-2)^{25} : (-2)^{24}]\cdot(-2) + (-3)\cdot(-1)^{2k}$ unde $k \in \mathbf{N}$.

10. Dacă $a = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{100}$,
$b = (-1)^1\cdot(-1)^2\cdot(-1)^3\cdot \ldots \cdot(-1)^{100}$, comparați $a+b$ cu $a\cdot b$. Egalitățile $a+b=b$ și $a\cdot b=a$ sunt adevărate?

11. Se dau numerele: $x = (-1)^2 + (-1)^{2^2} + (-1)^{2^3} + \ldots + (-1)^{2^{2000}}$,
$y = (-1)^3 + (-1)^{3^2} + (-1)^{3^3} + \ldots + (-1)^{3^{2000}}$. Calculați raportul dintre $x+y$ și $x:y$.

12. Dacă: $a = -1-2+3+4-5-6+7+8- \ldots -97-98+99+100$,
$b = (2+4+6+ \ldots +2000) - (1+3+5+ \ldots +1999)$,
$c = 1-2+3-4+5-6+ \ldots +1999-2000$, aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:
1) $a \neq b$; 2) $10\cdot a = b$; 3) $|b| = |c|$; 4) $-b = c$; 5) $b^2 = c^2$;
6) $10\cdot a = c$; 7) $(-10)\cdot a = c$; 8) $b = c$.

13. Calculați media aritmetică a numerelor:
$a = (-1)^1\cdot(-1)^2\cdot(-1)^3\cdot \ldots \cdot(-1)^{2001}\cdot(-5)^3$, $b = (-2)^1\cdot(-2)^2\cdot(-2)^3\cdot \ldots \cdot(-2)^{100} : (2^{50})^{101}$.

14. Aflați valoarea expresiilor:
1) $[-3^2 + (-3)^2 + (-1)^n]\cdot[-2^3 - (-1) - 1^n]\cdot(-1)^n$;
2) $[5\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2]\cdot[5\cdot(-1)^{2n} + 3\cdot(-1)^{2n+1}]$;
3) $[(-1)^n\cdot(-2^3)^n - 8^n] : (-2)^{3n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

15. Determinați valorile expresiilor:
$a = (-3)\cdot(-1)^n - (-2)\cdot(-1)^m$ unde $n, m \in \mathbf{N}$;
$b = (-1)^m\cdot(-7) + (-1)^n\cdot 5 - (-1)^{2p}\cdot(-2) + 1$ unde $m, n, p \in \mathbf{N}$;
$c = (-1)^n + (-1)^m + (-1)^p + (-1)^{m+n+p}$ unde $n, m, p \in \mathbf{N}$.

16. Calculați:
a) $x = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$, $n \in \mathbf{N}$;
b) $y = (-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} + (-1)^{4n}$, $n \in \mathbf{N}$;
c) $z = 3\cdot(-1)^{3n+2} + (-2)\cdot(-1)^{3n+4} - 4\cdot(-1)^{3n+8}$, $n \in \mathbf{N}$.

17. Fie $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 10\}$. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare un element din mulțimea A, să fie prim?

18. Să se determine $x \in \mathbf{Z}$, știind că $\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^{-1} \in \mathbf{Z}$.

19. Pentru ce valori $x \in \mathbf{Z}$, $\dfrac{3x-1}{2}$, $\dfrac{5x-3}{2}$ sunt simultan întregi?

20. Arătați că $a = \dfrac{2n-1-3\cdot(-1)^n}{4} \in \mathbf{Z}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

21. Arătați că numerele a și b sunt naturale oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.
$a = \dfrac{(-1)^{2n+1}\cdot(1-10^n)}{9}$; $b = \dfrac{10^n - (-1)^{2n}}{9}$.

22. Arătați că $(\forall) n \in \mathbf{N}$:
$a = (-2)^n + (-2)^{n+1} - (-2)^{n+3} - 7\cdot(-2)^n$ este divizibil cu 7;
$b = (-3)^n + (-3)^{n+1} - (-3)^{n+3} - 14\cdot(-3)^n$ este divizibil cu 11.

23. Determinaţi valorile naturale ale lui x pentru care $2x+1 \,/\, 4x+11$.

24. Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care $2x+3 \,/\, 7x+15$.

25. Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care **a)** $\dfrac{x+4}{x-1} \in \mathbf{N}$; **b)** $\dfrac{x+8}{x+2} \in \mathbf{Z}$;

c) $\dfrac{3x+5}{x+1} \in \mathbf{Z}$; **d)** $\dfrac{x^2+x+7}{x+1} \in \mathbf{Z}$.

26. Dacă a Z şi $3 \nmid a$, atunci $3 \,/\, (a+1)$ sau $3 \,/\, (a+2)$.

27. Dacă produsul a trei numere întregi consecutive este –60, aflaţi numerele.

28. Aflaţi x din proporţiile:

a) $\dfrac{(-5)\cdot(-2)}{15:(-3)} = \dfrac{x}{-3-(-2)}$; **b)** $\dfrac{x}{1\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^4} = \dfrac{(-3)^3 : (-3)^2 \cdot (-2)}{\left[(-2)^3\right]^2 : (-2)^{2^2}}$.

29. Rezolvaţi în **Z** ecuaţiile:

1) a) $5x+10=0$; b) $5x-1=9$; c) $-3x+4=-5$.
2) a) $2(x+1)=6$; b) $3(x-2)=2(x-4)$; c) $x(x+1)=x^2+2x+1$.
3) a) $|x|=3$; b) $|2x-1|=5$; c) $2\cdot|x+1| - 5 = 1 - |x+1|$.

30. Rezolvaţi în **Z** ecuaţiile:

a) $-4-\{6-[-3+(-3)+(-5-x)+6]-9\}=1$; **b)** $-10\cdot\{2-2\cdot[(-3)^5 : 3^4 - 2]\} = -4x$.

31. Rezolvaţi în **Z** inecuaţiile:

1) a) $x-3>0$; **b)** $-x+3>1$; **c)** $-5x+1<-4x$.
2) a) $x:3<-2$; **b)** $3(x+1)\geq -6$; **c)** $|x-3|<1$.

32. Determinaţi elementele mulţimilor:

$A=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ 2x-1=-5\}$; $B=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ x+5\leq 4\}$;
$C=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ 2x-1<5\}$; $D=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ x>-4$ şi $x\leq 0\}$;
$E=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ -3\leq x<-1\}$; $F=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ |x|=2\}$;
$G=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ |x|\leq 3\}$; $H=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ |x|>3\}$; $I=\{x \mid x\in\mathbf{Z};\ 1\leq|x|<3\}$.

33. Determinaţi $n\in\mathbf{Z}$, astfel încât mulţimea $A=\{n, 0, 1\}$ să fie egală cu mulţimea $B=\{x\in\mathbf{Z} \mid |x|\leq 1\}$.

34. Se consideră mulţimile: $A=\{x\in\mathbf{N} \mid x\leq 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z} \mid |x|\leq 2\}$.

a) Stabiliţi care din următoarele relaţii sunt adevărate: $A=B$; $A\subset B$, $B\subset A$.
b) Arătaţi că $(A\cap B)\cup(A\cup B)=B$ şi $(A\cup B)-(A\cap B)=B-A$.

35. Date fiind mulţimile: $A=\left\{x\in\mathbf{Z} \,\middle|\, \dfrac{x}{-3}\geq 0,\ x\geq -2\right\}$,

$B=\left\{x\in\mathbf{Z} \,\middle|\, \dfrac{1-3x}{-2}<4,\ -2\leq x\leq 2\right\}$, $C=\left\{x\in\mathbf{Z}^* \,\middle|\, |x|=x,\ x<3\right\}$.

Verificaţi dacă $A\cup C\subset B$; $B-C=A$; $A\cap C=\varnothing$.

36. Fie mulţimile: $A=\{x\in\mathbf{Z} \mid |2x-1|<5\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z} \mid x/2\}$. Să se calculeze: $(A\cup B)\cap\mathbf{N}$; $A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)$.

37. Dacă $A=\{x\in\mathbf{Z} \mid x\in D_3\}$, $B=\{y\in\mathbf{Z}^* \mid |y|\leq 1\}$, $C=\{z\in\mathbf{Z} \mid 2z+1=3\}$. Determinaţi $A\cup B\cup C$; $A\cap B\cap C$; $(A-B)-(B-C)$.

38. Aflaţi cinci numere întregi consecutive în fiecare din cazurile:

a) cel mai mare dintre ele este 3; **b)** cel mai mic este –3;
c) numai trei dintre ele sunt negative;
d) suma lor este –10; **e)** produsul lor să fie –120.

39. Aflaţi toate perechile de numere întregi care au produsul egal cu –18.

40. Aflaţi toate tripletele de numere întregi distincte care au produsul egal cu –18.

B.

1. Fie $A=\{(-2)^3;\ -3^2;\ |-3|\cdot(-1)^5;\ ||-3+5|-3|;\ (2\cdot 2^2\cdot 2^5):[(-2)^3]^2\}$. Ordonaţi crescător elementele mulţimii A şi determinaţi $A\cap\mathbf{N}$ şi $A-\mathbf{Z}$.

2. Fie numerele: $a=[(-1)^{2000}\cdot(-1)^{2001}]\cdot x$, $x\in\mathbf{Z}$;
$b=(-1)^n+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+[(-1)^n]^2+(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$. Determinaţi valorile lui x astfel încât a şi b să fie numere opuse.

3. Calculaţi suma: $S=(-1+2-3+4-\ldots-9+10)+(-1+2-\ldots-19+20)+(-1+2-\ldots-29+30)+\ldots+(-1+2-\ldots-99+100)$.

4. Dacă $E(n)=(-1)^n\cdot n$, $n\in\mathbf{N}$, calculaţi suma: $S=E(0)+E(1)+E(2)+\ldots+E(1999)+E(2000)$.

5. Dacă $S_1=1+2-3$; $S_2=1+2-3+4+5+6-7-8$;
$S_3=1+2-3+4+5+6-7-8+9+10+11+12-13-14-15$, calculaţi:

a) ultimul termen al sumei S_{100}; **b)** $S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{100}$.

6. Calculaţi $S=S_{1999}+S_{2000}+S_{2001}$ unde $S_n=1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n$.

7. Calculaţi:

a) $(2+4+\ldots+2000)-(1+3+\ldots+1999)$; **b)** $(2+4+\ldots+2000)-(1+3+\ldots+2001)$;
c) $(1+3+\ldots+2001)-(2+4+\ldots+2000)$.

8. Calculaţi $S=(-1)^k+(-1)^{k+2}+(-1)^{k+4}+(-1)^{k+6}+\ldots+(-1)^{k+2000}$, $k\in\mathbf{N}$.

9. Arătaţi că numărul:

$A=(-3)\cdot(-1)^n-5\cdot(-1)^{n+1}+10\cdot(-1)^{k^2-k+2000}-4\cdot(-1)^{p^2+p+1}$ este par, unde $k, n, p\in\mathbf{N}$.

10. Se consideră numerele: $a=(-1)^n\cdot(-1)^{2n}\cdot(-1)^{3n}\cdot\ldots\cdot(-1)^{100n}$, $n\in\mathbf{N}$, $b=(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}$. Care din următoarele propoziţii este adevărată?
P_1: $a<b$; P_2: $a=b$; P_3: $a>b$.

11. Dacă $a=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+...+(-1)^{2000}$,
$b=(-1)^1+(-1)^{1+2}+(-1)^{1+2+3}+...+(-1)^{1+2+3+...+2000}$, calculați a^b+b^a.

12. Arătați că $9^a<a^{10}$, unde
$a=10\cdot 11-10^2\cdot 11+10^3\cdot 11-10^4\cdot 11+...+10^{50}\cdot 11+10^{51}$.

13. Determinați $a\in\mathbf{Z}^*$, astfel încât numărul $A=\dfrac{an-1+(a-1)\cdot(-1)^{n+1}}{a}$ să fie întreg, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

14. Arătați că $(\forall)n\in\mathbf{Z}$ produsul $P=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ este divizibil cu 5.

15. Fie $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-2|\le 1\}$, $B=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{2x+4}{2x-1}\in\mathbf{Z}\right\}$. Calculați $(A\cup B)-(A\cap B)$ și $A\times B$.

TESTE DE EVALUARE

A.

Testul 1

1. Se consideră mulțimile:
$M=\{1, 2, 3\}$; $N=\{y\in\mathbf{N}\mid y=2x-1, x\in M\}$; $P=\{z\in\mathbf{N}\mid z=2^x-1, x\in M\}$.
Calculați: $M\cup N\cup P$; $(M\cap N)\cup(N\cap P)$; $(M-N)-P$; $(M\times N)-(N\times P)$.

2. Desenați cu ajutorul diagramelor mulțimile A și B care satisfac condițiile:
i) $A\cup B=\{x\mid x\in\mathbf{N}^*, x\le|-3|\}$; **ii)** $A\cap B=\varnothing$;
iii) Suma elementelor lui B este un număr impar.
Ce condiție trebuie adăugată ca soluția să fie unică?

3. Să se determine mulțimile X și Y știind că:
a) $X\cup Y=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, |x|\le 2\}$; **b)** $X-Y=\{1, 2\}$;
c) $Y-X=\{-2\}$; **d)** $X\cap Y=\{-1, 0\}$.

4. Fie $A=\{3, x, y-x, 5\}$, $B=\{a+1, 4, b, 7\}$. Înlocuiți literele cu numere astfel încât $A=B$.

5. Să se determine $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, x^2<a\}$ unde
$a=(-2)\cdot(-3)+(-1)^5\cdot(-2^3)-3\cdot(-15):(-5)$. Scrieți două submulțimi ale lui A ce au suma elementelor un număr par prim.

6. Găsiți valorile întregi pentru care fracția $\dfrac{3x-1}{x+2}\in\mathbf{Z}$.

Testul 2

1. Se dau mulțimile: $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}, x\le 3\}$; $B=\{y\mid y\in\mathbf{N}, y=2^x, x\in A\}$;
$C=\{z\mid z\in\mathbf{Z}, z=x-1, x\in A\}$. Determinați elementele mulțimilor: $(A\cup B)\cap C$; $(A-B)\cup(B-C)$; $A-(B\cap C)$; $(B\cup C)-\mathbf{N}$.

2. Se consideră mulțimea $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\le 3\}$. Scrieți cinci submulțimi care au suma elementelor nulă.

3. Aflați mulțimea A astfel încât să îndeplinească simultan condițiile:
a) $\mathrm{Card}\,(A\times A)=16$; **b)** $(0, 4)\in A\times A$; **c)** $A\subset\mathbf{N}$;
d) suma elementelor mulțimii A este mai mică decât 8.

4. Dacă $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}; |x|\le 4\}$ și $B=\{-3, |-2|, 1, \min(-4, -5)\}$, calculați: $A\cup B$; $A\cap B$; $(A-B)\cup(B-A)$; $(A\cap B)\times\{1, 2\}$.

5. Comparați a^2 cu b^6 unde:
$a=1\cdot(-1)^1+2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^3+...+2000\cdot(-1)^{2000}$;
$b=(-5)\cdot(-2)+(-27):(+3)\cdot(-1)+(-10)^3:(-10)^2$.

6. Desenați diagramele a două mulțimi A și B cu următoarele condiții:
i) $A\cup B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, -5\le x\le 0\}$; **ii)** $A\cap B=\{$opusul lui 3, opusul lui 4$\}$;
iii) $A-B=\{$opusul lui $|-5|$, $-|-2|\}$.
Scrieți, enumerând elementele, mulțimile A și B și arătați CardA=CardB.

Testul 3

1. Aflați câte elemente are mulțimea $A\cup B$ dacă:
$A=\{x\mid \overline{1x45}\,\vdots\,15\}$, $B=\{y\mid \overline{14y5}\,\vdots\,45\}$.

2. Scrieți mulțimile A, B, C formate din literele cuvintelor: caiet(A), carte(B), capacitate(C). Determinați mulțimile: $A\cup B\cup C$; $A\cap B\cap C$; $(A-B)\cup(B-C)$.

3. Dacă notăm cu C=mulțimea poligoanelor convexe, cu P=mulțimea paralelogramelor, cu T=mulțimea trapezelor, stabiliți care din următoarele relații sunt adevărate și care false: $P\subset C$; $T\subset C$; $P\cup T=C$; $P\cap T=\varnothing$.

4. Fie $m, n\in\mathbf{N}^*$ și mulțimile $A=\{2n+2, 5\}$, $B=\{m+1, 2n+1\}$, $\mathrm{Card}(A\cup B)=2$, aflați media ponderată a numerelor m și n, unde n are ponderea 5 iar m are ponderea 7.

5. Determinați $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^{-1}\in\mathbf{Z}$.

6. a) Aflați elementele mulțimilor A, B, C știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
1) $A\cap B=\{-2, 1, 3\}$; 2) $B\cap C=\{-2, 3\}$;
3) $A\cup C=\{1, 3, -2, -4\}$; 4) Card A= Card B= Card C=3.
b) Determinați elementul x astfel încât $(A-B)\cup C=D$ și $D=\{-2, x, -4\}$.

Testul 4

1. Scrieți toate submulțimile mulțimii:
$M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=(-1)^k+(-1)^{k+1}+(-1)^{k+2},\ k\in\mathbf{N}\}$.

2. Se dau mulțimile: $A=x\mid x\in\mathbf{Z}^*, |x|\le 2\}$, $B=\{y\mid y\in\mathbf{Z}, y=x^2, x\in A\}$,
$C=\{z\mid z\in\mathbf{Z}, z=2x-1, x\in A\}$. Folosind diagramele Venn-Euler verificați dacă: $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-A)$.

3. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite următoarele condiții:
a) $A\cup B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2\le x<3\}$; **b)** $A\cap B=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\le 1\}$;

c) $A-B=\{-2\}$; **d)** $B-A=\varnothing$.

Aflați apoi mulțimea $C=(A\cup B)\cap \mathbf{N}$.

4. Se dau mulțimile: $M=\left\{x \,\middle|\, x\in \mathbf{Z},\ x=\dfrac{-10}{n+1},\ n\in \mathbf{N}^*\right\}$ și $P=\{a, a-1, -5\}$.

Determinați numărul a, astfel încât mulțimile M=P.

5. Calculați $|a|^{2001}$, unde $a=[-2^2+(-2)^2+(-1)^{2n+3}]\cdot[-3^2+(-3)^2+(-1)^{2n+4}]$.

6. Fie $n=[(-1)^{2000}\cdot(-1)^{2001}]^5\cdot a$ și

$m=(-1)^n+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+(-1)^{2n}+(-1)^{2n+3}$, $n\in \mathbf{N}$, n=par.

Determinați valoarea lui $a\in \mathbf{Z}$ astfel încât m și n să fie numere opuse.

B.

Testul 1

1. Aflați valorile lui x care verifică simultan condițiile:

1^o $x\in A\cap \mathbf{N}$; 2^o $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, x\}$; 3^o $A\cap B=\{3, 4\}$;

4^o Suma elementelor din mulțimea A și din B este aceeași.

2. Se dau numerele întregi: $a=1-2+3-4+5-6\ ...\ +1999-2000$;

$b=-1+2-3+4-5+6+\ ...\ -1999+2000$.

1) Comparați numerele a cu b și |a| cu |b|.

2) Determinați $x\in \mathbf{N}$ astfel încât $a^x=b^x$.

3) Determinați $y\in \mathbf{N}$ astfel încât $a^y+b^y=0$.

3. Se dau mulțimile: $A=\left\{z\in \mathbf{Z} \,\middle|\, \dfrac{2x+5}{x-5}\in \mathbf{Z}\right\}$ **,** $\mathbf{B}=\left\{x\in \mathbf{Z}\setminus \mathbf{N}^* \,\middle|\, \dfrac{2x-1}{-3}\le 1\right\}$**.**

Determinați:

a) elementele mulțimilor A și B; **b)** $A\cup B$; $A\cap B$; $A-B$; $A\times B$.

4. Arătați că numărul A este impar, $(\forall)n\in \mathbf{N}$, unde:

$A=(-5)\cdot(-1)^n-7\cdot(-1)^{n+3}+9\cdot(-1)^{n^2+n+2}-4\cdot(-1)^{n^2+n+1}$.

5. Rezolvați ecuațiile:

a) $|x-2|=3$; **b)** $|x-3|+|y+5|=0$.

6. Arătați că $a=\dfrac{2k-1+3(-1)^{k+1}}{4}$ este număr natural, $(\forall)k\in \mathbf{N}^*$.

Testul 2

1. Să se determine mulțimea $M=\{x, y, z, t\}$ dacă sunt îndeplinite relațiile:

1) $\{x, y, -5\}\subset\{y, z, -1\}$; **2)** $\{x, y, 1\}\subset\{-1, 1, 2\}$;

3) $\{y, z, t\}\cup\{x, 2\}=\{x, z, t, 2\}$.

2. Se dau mulțimile: $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid -1\le x\le a, a\in \mathbf{N}\}$, $B=\{x\in \mathbf{N} \mid a\le x\le 3\}$.

a) Să se determine $a\in \mathbf{N}$ astfel încât $A\cap B=\{1\}$.

b) Aflați $(A\cup B)-\mathbf{N}$; $(A\times B)-(B\times A)$.

3. Fie $A=\{x\in \mathbf{Z}^* \mid -100<x\ \ 100\}$.

a) Câte elemente are mulțimea A? **b)** Calculați suma elementelor mulțimii A.

c) Dați exemple de submulțimi ale mulțimii A care sunt formate din numere pare și au suma elementelor nulă.

4. Dacă $2\cdot|x-y+3|+|-5|\cdot(y-2)^2=0$, aflați valorile lui x și y.

5. Să se determine $x, y\in \mathbf{Z}$, astfel încât $\dfrac{8x+13}{2x+1}$ și $\dfrac{5y+11}{4y+3}$ să fie întregi.

6. Calculați: $S=[(1+2+3+\ ...\ +2000)\cdot(2001-1-2-3-\ ...\ -2000)+(-1-2-3-\ ...\ -2000)^2]:2001$.

Testul 3

1. Arătați că mulțimile: $A=\{n^2 \mid n\in \mathbf{Z}\}$ și $B=\{5n+2, 5n+3 \mid n\in \mathbf{N}\}$ sunt disjuncte.

2. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite condițiile:

1) $A-\{1, 2\}=B\cup\{-6, -5, 0, 4\}$; **2)** $B-\{1, 2, 3\}=A\cap\{-5, 0\}$;

3) $A\cup B\subset\{-6, -5, 0, 1, 2, 3, 4\}$; **4)** Card A = Card B+3.

3. Fie $A=\{x\in \mathbf{Z}^* \mid |x|\le 100\}$ și $B=\{x\in \mathbf{Z}-\mathbf{N} \mid x\ge -50\}$. Aflați Card (A–B).

4. Știind că numerele întregi a, b, c satisfac relația $3a-5b+12c=0$, arătați că numărul $ab-bc$ este multiplu de 15.

5. Rezolvați în $\mathbf{Z}^*\times \mathbf{Z}^*$ ecuația: $2x+3y=|xy|$.

6. Să se găsească cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia: $(-3)\cdot(-1)^n+5\cdot(-1)^m-2\cdot(-1)^{2p}+7$, $(\forall)m, n, p\in \mathbf{N}$.

Testul 4

1. Mulțimile A și B au fiecare câte două elemente.

a) Câte elemente poate avea $A\cup B$? **b)** Câte elemente poate avea $A\cap B$?

c) Câte elemente poate avea A–B? dar B–A?

Aceleași întrebări dacă mulțimile au fiecare trei elemente sau o mulțime, două și cealaltă trei.

2. a) Găsiți triplete de numere întregi consecutive care au suma egală cu produsul lor.

b) Găsiți numere întregi negative, consecutive, ce au suma −55.

c) Este posibil ca suma unor numere întregi consecutive să fie 2000? Dar 2001?

3. Aflați $x\in \mathbf{Z}$ știind că sunt îndeplinite condițiile:

a) $|x|\ge 1$; **b)** $|x-1|\le 2$; **c)** $\dfrac{x}{2}+3\le 2x$.

4. Rezolvați în **Z** ecuațiile:

a) $|x-2|+|y+3|=0$; **b)** $2\,|2x+6|+(1-y)^2=0$; **c)** $|-3|\cdot(x+5)^2+5(3y-8)^2=0$.

5. Dacă $\dfrac{x}{6}\in \mathbf{Z}$ atunci $a=\dfrac{1}{2}(x+y+y^2)$ este întreg pentru $(\forall)y\in \mathbf{Z}$.

6. Determinați numerele întregi a și b știind că:

$b(1-a)\cdot(-1)^{2k+4}+(b-a)\cdot(-1)^{2k+3}-(a-b)\cdot(-1)^{k(k+1)}+3=0$, $k\in \mathbf{N}$.