PROBLEME PENTRU TOȚI ELEVII

Clasele I-IV

Clasa I

P.1131. Care este cel mai mic număr impar?

P.1132. Completează tabelul:

a	28	31	40
a+10			
a–20			

P.1133. Care este ordinea a trei copii: Ionuț, Andrei și Maria aflați la rând în înghețată, ştiind că Andrei nu este primul şi Ionuț nu va lua înghețată înaintea lui Andrei?

P.1134. Suma a două numere este 17. Care ar putea fi numerele?

P.1135. Mama tatălui, soacra mamei şi bunica mea câți ochi aveau?

P.1136. Dacă Maria are cu 8 nuci mai multe decât Ioana, adică 18, câte nuci au împreună cele două fetițe?

P.1137. Rezolvați exercițiile şi ordonați crescător rezultatele obținute:

C=4 + 9 O=9 + 8
A=8 + 7 R=8 + 6
A=10 + 10 I=13 + 3
V=13 + 6

Stabilind relația ,,litere-numere" veți găsi numele unui oraş. Care este acesta?

P.1138. Uneşte numerele a căror sumă este 50.

10	15	20	25	27	33	46	50
30	4	40	0	35	25	23	15

P.1139. Aleg un număr mai mic decât 15 şi scad din el 10. Ce rest pot obține?

P.1140. Câte kilograme de mere a luat mama dacă numărul de kilograme este un număr mai mare decât 4 şi mai mic decât 8?

P.1141. La un concurs de rezolvări de probleme un elev a obținut 10 puncte. Câte puncte s-au acordat pentru fiecare din cele trei probleme, dacă au fost notate diferit? Aflați toate posibilitățile.

P.1142. Găsiți toate numerele de două cifre care au cifra zecilor cu 2 mai mare decât cifra unităților.

P.1143. Aflați data naşterii lui Mihai dacă ziua este un număr de două cifre, iar diferența dintre cifra zecilor şi cifra unităților este 3 şi luna este aceea în care începe anul şcolar.

P.1144. Scăzătorul este 32. Inversând locul cifrelor din care este format obținem diferența. Care este descăzutul?

P.1145. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Dacă ar mai veni o fată, numărul băieților ar fi egal cu numărul fetelor. Câte fete şi câți băieți sunt în clasă?

P.1146. Valeria are o pungă cu bile galbene, verzi şi albastre. Ea scoate fără să privească trei bile. Ce culoare pot avea cele trei bile? (Scrie cel puțin 5 posibilități).

P.1147. Numărul unei case este 66. Dacă bate vântul numărul se întoarce. Care este diferența dintre numărul întors şi cel real?

P.1148. Scrieți în ordine descrescătoare numerele de două cifre care au suma cifrelor 10. Care este cel mai mic număr?

P.1149. Într-o cuşcă la grădina zoologică sunt veverițe. Fiecare veveriță stă pe o coadă de veveriță. Cuşca are patru colțuri. Câte veverițe sunt în cuşcă?

P.1150. Găseşte cât mai multe soluții pentru relația: $\overline{aa}-\overline{bb}=11$. Care este numărul maxim de soluții?

Probleme selectate şi propuse de:
Problemele 1- 10 propuse de Vasilica Mitrică şi Elena Valu, înv. Băileşti
Problemele 11-15 propuse de Tudorina Pădeanu, înv. Catane
Problemele 16-20 propuse de Liliana Firan, înv. Băileşti

Clasa a II-a

P.1151. Calculează:
37–5= 98–4= 77–6= 59–3=

P.1152. Află valoare lui a: a+14 =65 a–47=31

P.1153. Eugen are 6 nuci. Câte nuci îi mai trebuiesc pentru a avea 18 nuci?

P.1154. Efectuează:

34+	56+	67+	77+	85+	64+	35+
6	23	27	15	9	36	49

56–	87–	56–	73–	50–	70–	90–
23	8	39	68	24	65	31

P.1155. Află numărul:
a) cu 5 mai mare decât 17:...
b) cu 9 mai mic decât 50: ....
c) egal cu suma numerelor 25 şi 59: ....
d) egal cu diferența numerelor 60 şi 34: ....
e) care arată cu cât este mai mare 81 decât 18:...

P.1156. Completează şirurile cu numerele care lipsesc:
a) 8, 11, 14, ….., 20, …., ….. . **b)** 13, 24, 35, ….., 57, ….., 79.
c) 90, 75, ….., 45, ….., …… . **d)** 50, 51, 53, 54, ….., ….., ….. .

P.1157. Ana a colorat ieri 8 pagini dintr-o carte, iar azi a colorat cu 14 pagini mai multe. Câte pagini a colorat astăzi?
....
Câte pagini a colorat în cele două zile?
....
Dacă întreaga carte are 60 de pagini, câte pagini mai are de colorat?
....

P.1158. Irina are în grădină 27 trandafiri şi cu 9 mai puține lalele. Câte flori are Irina în grădină?

P.1159. Numără în intervalele date:
16, ...24; 29,.....................................21;
42,......................................53.

P.1160. Scrie in ordine crescătoare nr.:78,23,56,87,65,92,4,11.
a) scrie doar numerele pare:
b) alege numerele mai mici decât 80:
c) scrie răsturnatele lor: doar numere mai mici sau egale cu23:

P.1161. Descompune în sumă de zeci şi unități numerele : 45,91,32.

P.1162. Scrie toate numerele naturale de două cifre care se pot forma cu cifrele: 5,6.

P.1163. Scrie:

a) toate numerele naturale formate din zeci care sunt cuprinse între 18 şi 59.
b) toate numerele care au cifra zecilor 4:
c) toate numerele care au cifra zecilor 7,iar cifra unităților un număr par:
d) cel mai mare număr de două cifre:
e) cel mai mic număr impar de două cifre:
f) cel mai mare număr natural de două cifre diferite: cel mai mic număr scris cu trei cifre:

Toate numerele care au cifra zecilor cu 1 mai mare ca cifra unităților:

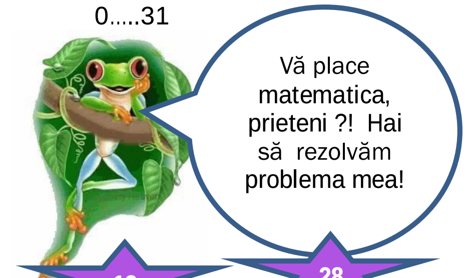
P.1164. Descoperă vecinii:

……99…….	….18……	…… 57…..
……70…….	… 43……	…..65……

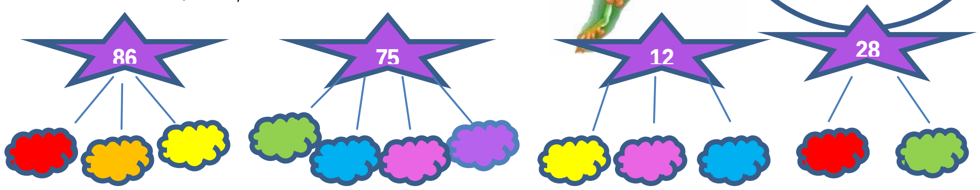
P.1165. Compară:

25…25	53…35	12…21
30…27	49….50	0…..31

P.1166. Ce numere lipsesc:
71,72,……………………..79;
64,….,….,61,….,….., …., ….
5,10,….., …..,25,…., ….,40,….
35,45,55,…, ….,….,….. .
8,10,14,20,……,……… .



P.1167. Descompuneți următoarele numere:



P.1168. Calculați:

24+5=	23–14=
50+11=	58+2–2=
41+34–17=	22–11+55–4=

P.1169. Ana a cumpărat de la piață 3 kg de cireşe, 2 kg de piersici şi două lăzi de căpşuni, fiecare ladă cântărind 5 kg. Câte kg de fructe a cumpărat Ana?

P.1170. Comparați următoarele numere folosind: <, =, >.
44 59 99 99 86 68

Probleme selectate şi propuse de Gabriela Popescu, înv. Băileşti, Dolj

Clasa a III-a

P.1171. Scrieți toate numerele pare de la 500 la 512.
P.1172. Scrieți predecesorul şi succesorul numerelor: 300, 459, 999, 550.
P.1173. Încercuiți numărul care nu se potriveşte:
a) 636, 638, 639, 642, 644; **b)** 320, 420, 510, 620, 720;
c) 940, 935, 945, 925, 920.
P.1174. Scrieți toate numerele de două cifre ale căror zeci se scriu cu cifra 8.
P.1175. La un concurs sportiv trebuia să participe 336 de fete şi cu 114 mai puțini băieți. Ştiind că 17 băieți au lipsit, aflați numărul băieților care au participat la concurs.

P.1176. Într-o livadă sunt 162 de cireşi, vişini cu 219 mai mulți, iar pruni cu 148 mai puțini decât vişini. Aflați câți pruni sunt în livadă.

P.1177. Mă gândesc la un număr. Din el iau 128. Rezultatul îl măresc cu 36 şi obțin 471. La ce număr m-am gândit?

P.1178. Un termen al adunării este 179. Dacă i se adaugă 236 şi încă un termen necunoscut, se obține suma 455. Aflați termenul necunoscut.

P.1179. Aflați suma a trei numere naturale pare consecutive, ştiind că unul dintre numere este 324. Câte variante există?

P.1180. O carte costă 154 de lei, o revistă costă cu 86 lei mai puțin, iar un atlas cât cartea şi revista în total. Cât costă atlasul?

P.1181. Din suma numerelor 84 şi 14 scădeți diferența lor.

P.1182. Completați cu semnul + sau – pentru a obține relații adevărate:

125 ☐ 317=442	586 ☐ 330=256
872 ☐ 351 ☐ 205=726	438 ☐ 296 ☐ 134=600

P.1183. Dintr-un număr natural am scăzut suma numerelor 136 şi 354 şi am obținut 273. Care a fost numărul?

P.1184. Suma a două numere este 798. Ştiind că jumătatea primului număr este 314, aflați cele două numere.

P.1185. Se dau numerele 152, 498 şi 294. Cu cât este mai mică suma celor mai mici față de cel mai mare dintre acestea?

P.1186. Înlocuiți steluțele cu numere potrivite pentru a obține rezultatele corecte:

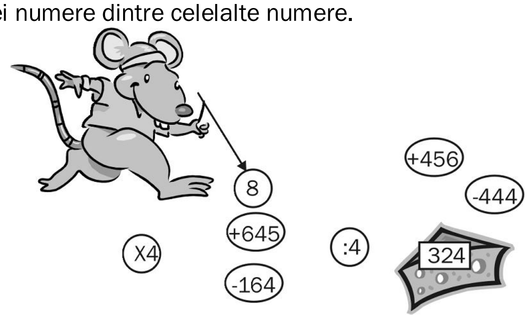
256+	6*1+	*44–	7**–
13*	229	251	246
395	830	93	460

P.1187. Diferența a două numere este 304, iar cel mai mic este 334. Află numerele.

P.1188. Scrieți toate numerele naturale formate din sute, zeci şi unități, ale căror cifre sunt numere naturale consecutive, aşezate crescător.

P.1189. Scrieți toate numerele de forma $\overline{a4b}$ care au suma cifrelor 10.

P.1190 Ajutați şoricelul matematician să găsească drumul cel bun pornind de la numărul 8 şi folosind încă trei numere dintre celelalte numere.



Probleme selectate şi propuse de Ionel Cătălin Călin, înv. Băileşti

Clasa a IV-a

P.1191. Se dau numerele: $a=95\times37+107\times34-5893$; $b=58\times92\times8\times58$

Să se stabilească care din relațiile următoare este adevărată: 1) a>b; 2) a<b.

Să se calculeze diferența dintre suma şi diferența celor două numere.

Mirela Giurgea, Galiciuica, Dolj

P.1192. Să se determine x din relația: 25x=50+51+52+...+99+100.
Mihaela-Angela-Sandra Toma, jud. Timiş

P.1193. Să se determine valorile lui x, ştiind că: $8<3(8-x)<14$. *Nicoleta Dunavatu, Băileşti*

P.1194. Fie A mulțimea numerelor naturale la care se împarte exact 18, iar B mulțimea numerelor naturale la care se împarte exact 24. Se cere:

a) Să se găsească mulțimea C formată din elementele comune mulțimilor A şi B.
b) Găsiți cel mai mic număr care e împarte exact la 18 şi la 24.
c) Calculați produsul numerelor 18 şi 24, şi împărțiți acest produs la numărul găsit la punctul anterior. *Marcela Balaci, Catane, Dolj*

P.1195. Să se determine x ştiind că: $17\times8-9\times7+3\times9+2x=140$. *Maria Cichirea, Calafat*

P.1196. Într-o săptămână, pentru o cantină, s-a cumpărat o anumită cantitate de zahăr. În a doua săptămână s-au cumpărat cu 5 kg mai mult decât în săptămâna precedentă, iar în a treia săptămână cât în primele două la un loc. Ştiind că în total s-a plătit suma de 228 lei şi că un kg de zahăr costă 2 lei, aflați câte kilograme de zahăr s-au cumpărat în fiecare din cele trei săptămâni! *Ecaterina Ene, Băileşti*

P.1197. Determinați numerele naturale consecutive x, y, z ştiind că: 5x+4y+z=44.
Ela Stamin, Silіştea Crucii, Dolj

P.1198. Fie a şi b două numere naturale date. Se ştie că: a+2b=46. Să se determine cu cât se măreşte produsul numerelor date dacă primul se măreşte cu 4 şi al doilea se măreşte cu 2. *Cristina Udrescu, Craiova*

P.1199. O gospodină a plecat la piață cu suma de 250 lei şi a cumpărat:
- 5 kg de cartofi cu 4 lei kilogramul; - 2 kg de peşte cu 60 lei kilogramul;
- 3 kg de carne cu 20 lei kilogramul; - 5 kg de banane cu 6 lei kilogramul.

Din suma rămasă a cumpărat portocale cu 4 lei kilogramul. Cât cântăreşte sacoşa cu toate cumpărăturile, ştiind că sacoşa goală cântăreşte 1 kilogram?
Alina Theodorescu, Constanța

P.1200. Dacă: 5ab+2c=14, să se găsească minim trei valori pentru fiecare literă a, b, c care veridică relația dată. *Gabriela Stroe, Constanța*

P.1201. Să se afle trei numere ştiind că suma lor este 2001, iar dacă scădem din fiecare acelaşi număr, se obțin numerele 50, 150 şi 151. *Maria Cămăraşu, Craiova*

P.1202. Să se afle două numere naturale dacă suma lor este 49 şi dacă la primul adunăm 5, iar pe al doilea îl înmulțim cu 5 obținem rezultate egale. *Gabriela Truică, Craiova*

P.1203. Să se determine valoarea lui x, ştiind că 3x+2, 4x+1 şi 5x sunt trei numere naturale consecutive. Determinați apoi cele trei numere. *Nicolița Dinu, Craiova*

P.1204. Găsiți mai multe numere care adunate să dea 20 şi înmulțite să dea tot 20. Câte posibilități sunt? *Gabriela Dobrescu, Craiova*

P.1205. Suma a trei numere naturale este 975. Dacă din fiecare număr se scade acelaşi număr se obțin, respectiv, numerele: 12, 345 şi 126. Care sunt cele trei numere?
Cristina Glonta, Rast, Dolj

P.1206. Se cumpără bilete la teatru în valoare de 96 de lei. Există bilete de 16 lei şi de 12 lei. Câte bilete s-au luat din fiecare fel? (Dacă sunt mai multe soluții, găsiți-le!)
Eugenia-Carmen Pascu, Craiova

P.1207. Dacă 6 tricouri şi 7 bluze costă 523 lei, iar 10 bluze şi 6 tricouri costă 652 lei, cât costă un tricou şi cât costă o bluză? *Mariana Ciuciulin, Băileşti*

P.1208. Suma a trei numere este 1988. Primul număr este egal cu al doilea, iar dacă împărțim al treilea număr la al doilea obținem câtul 2 şi restul 108. Să se afle cele trei numere. *Mihaela Sclipcea, Băileşti*

P.1209. Ce numere naturale împărțite la 7 dau câtul 103 şi resturi diferite?
Aurora Oanță, Ciorоiaşi, Dolj

P.1210. Într-o cutie sunt, în total, 70 de bile: roşii, galbene şi albastre. După ce se scot din acea cutie 7 bile roşii, 6 bile galbene şi 8 bile albastre, în cutie rămân de două ori mai puține bile galbene decât albastre şi de două ori mai multe bile galbene decât bile roşii. Câte bile, de fiecare fel, au fost la început în cutie? *Rodica Pascu, înv. Băileşti*

Probleme selectate şi propuse de Rodica Pascu, înv. Băileşti

Clasele V-VIII

Clasa a V-a

G.1101. Să se afle numărul natural de două cifre ştiind că predecesorul său este pătrat perfect iar succesorul său este cub perfect.

G.1102. Calculați:

a) $(1+3^{20}:3^{19})^6:2^{12}-2009^0$; **b)** $(1+2^{20}:2^{17}):3^{10}-1^{2009}$;

c) $320:4-\{(80-50)\cdot 2-[6\cdot 2+(50-23):3]\cdot 2\}$; **d)** $(16+2^{13}:2^9):2^5$.

G.1103. Calculați:

a) $1+2+3+\ldots+37$; **b)** $4+8+12+\ldots+200$; **c)** $1+3+5+\ldots+199$.

G.1104. Suma a două numere naturale este 86. Aflați cele două numere ştiind că restul împărțirii celui mare la cel mic este 2 şi câtul este 3.

G.1105. Ştiind că a+b=4 şi c=2, calculați $\left(2^a\right)^c\cdot\left(2^c\right)^b$.

G.1106. **a)** Determinați mulțimile: $A=\{x\in\mathbf{N} \mid x \mid 11\}$; $B=\{x\in\mathbf{N} \mid x \mid 33\}$.

b) Calculați $A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$, $B-A$.

G.1107. Determinați şi numerele naturale n care verifică egalitățile:

a) $n^2=64$; **b)** $n^3=64$; **c)** $n^4=1$; **d)** $n^2-3^2=4^2$.

G.1108. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $24x-17x+15-3x\le 23$; **b)** $2(4+x)-7\le 5$; **c)** $4(x+12)<68$.

G.1109. Rezolvați în **N** ecuațiile:

a) $x+5=13$; **b)** $3x-15=12$; **c)** $5(12-2\cdot 4)+x=29$;

d) $x(29-3\cdot 9)=64$; **e)** $x:3=25+16:2^3$.

G.1110. Calculați folosind factorul comun:

a) $478\cdot 102+102\cdot 33-11\cdot 102$; **b)** $278\cdot 105+105\cdot 32-10\cdot 105$;

c) $377\cdot 104+104\cdot 37-14\cdot 104$.

G.1111. Aflați suma cifrelor numărului: $2^{2010}\cdot 5^{2009}+5$.

G.1112. Dacă $\overline{xy}+\overline{yx}=121$, calculați x+y.

G.1113. Folosiți de trei ori numărul 3 şi două operații pentru a obține rezultatul 24.

G.1114. **a)** Aflați cel mai mic număr natural de două cifre care împărțit la 6 să dea rest 3.

b) Aflați cel mai mare număr natural de două cifre care împărțit la 8 să dea rest 1.

c) Aflați câte numere naturale de trei cifre dau rest 3 la împărțirea cu 5.

G.1115. Găsiți valoarea logică a următoarelor propoziții.

a) 245 se divide cu 7; **b)** 13 este divizor al lui 261;

c) 801 este multiplu al lui 3; **d)** Numărul 18 are exact cinci divizori.

e) 25 este divizor al lui 5.

G.1116. Se cunosc:

a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; **b)** $A\cap B=\{2, 3, 5\}$;

c) $A-B=\{1, 4, 7\}$

Găsiți A şi B.

G.1117. a) Calculați: $[(54:3^2-2^2)\cdot 26-5^2]:3^2$. **b)** Comparați numerele 2^{39} și 3^{26}.

G.1118. Dacă a+b=27 şi b+c=31, calculați 2a+7b+5c.

G.1119. Se consideră şirul de numere naturale: 15, 30, 45, 60, 75, ... şi un al doilea şir care are ca termeni numerele obținute efectuând suma cifrelor fiecărui termen din primul şir: 6, 3, 9, 6, 12...

a) Să se scrie următorii cinci termeni ai primului şir şi următorii 5 termeni ai celui de al doilea şir.

b) Care număr se află pe locul 2010 în primul şir?

c) Ce număr se află pe locul 2010 în al doilea şir?

G.1120. a) Calculați: A=61·49+50·61+61.

b) Cu ce număr trebuie înmulțit numărul A pentru a obține pătratul unui număr natural?

Probleme selectate şi propuse de Aurel Curea, prof.Băileşti

Clasa a VI-a

G.1121. Calculați:

a) $6+2\cdot[(3\cdot5^2-2^2\cdot18:3^2+3\cdot11):2^2]$;

b) $3^{100}:[3^{40}\cdot3^{58}+(3^{10}\cdot3^{15})^5:27^9+(4^{57}:4^{56}-1^5)^{106}:81^2]$;

c) $0{,}5+0{,}(2) : 0{,}0(2)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)\cdot 0{,}75$; **d)** $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)$

G.1122. Să se determine cifrele consecutive a, b scrise în baza 10 ştiind că $\overline{ab5}=5^{a+b}$.

G.1123. Găsiți toate numerele naturale de trei cifre, divizibile cu 18 ştiind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) au toate cifrele distincte;

b) oricare două cifre alăturate diferă între ele printr-o unitate.

G.1124. Arătați că diferența dintre un număr natural de 3 cifre şi răsturnatul său este divizibilă cu 99.

G.1125. Să se arate că numerele: A= $3^{n+1}\cdot5^n+3^n\cdot5^{n+2}+6\cdot3^n\cdot5^n$, B= $2^{2n+1}\cdot3^n+3^{n+1}\cdot4^n+2^{n+1}\cdot6^{n+1}$ sunt divizibile cu 17 oricare ar fi n∈**N**. Aflați n∈**N** astfel încât B|A.

G.1126. Suma a două numere naturale este 1089 şi c.m.m.d.c. este 121. Să se afle cele două numere naturale.

G.1127. Determinați numerele naturale care au exact patru divizori ştiind că suma divizorilor este 72.

G.1128. Să se determine toate fracțiile de forma $\frac{\overline{16xy}}{\overline{5x2y}}$ care se simplifică cu 12.

G.1129. a) Calculați suma: S= $\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot1}+\ldots+\frac{1}{903\cdot907}$.

b) Se consideră numărul: A= $\frac{10^n+8}{9}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{9900}\right)\cdot\frac{100}{99}$.

Arătați că A este număr natural. Care este ultima cifră a lui A?

G.1130. a) Arătați că dacă a, b, c, d∈**N*** şi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atunci numerele (a, d), (b, c), [a, d] şi [b, c] sunt termenii unei proporții.

b) Aflați x din proporția: $\frac{\overline{abcabc}}{x} = \frac{\overline{abc}}{\frac{1}{1001}}$.

G.1131. Care este numărul minim de puncte care determină 21 de drepte diferite (prin fiecare două puncte trece o dreaptă)?

G.1132. Demonstrați că oricum am alege 9 puncte în plan, ele nu pot determina 35 de drepte.

G.1133. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, astfel încât A să fie mijlocul segmentului [CB], iar B să fie mijlocul segmentului [AD]. Dacă AD=20cm, aflați lungimea lui [BC].

G.1134. a) Fie punctele A, M, N, B astfel încât M∈(AN), N∈(MB). Dacă AM=5cm, NB=3,5cm şi AB=11cm, calculați lungimile segmentelor [MN], [AN] şi [MB].

b) Dacă P este mijlocul segmentului [AM], calculați lungimile segmentelor [PB] şi [PM] şi apoi demonstrați că M este mijlocul segmentului [PN].

G.1135. Fie M mijlocul unui segment [AB]. Demonstrați că pentru orice punct C al dreptei AB are loc: $\frac{|AC - BC|}{2} \le MC \le \frac{AC + BC}{2}$.

G.1136. Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A_0, A_1, A_2, ..., A_{50} astfel încât: $A_0A_1=A_1A_2=...=A_{49}A_{50}=1$cm.

a) Calculați lungimea segmentului $[A_{18}A_{31}]$.

b) Câte dintre segmentele determinate de punctele date au ca mijloc punctul A_{21}?

c) Care este mijlocul segmentului $[A_{21}A_{29}]$?

G.1137. Fie [OC bisectoarea unghiului obtuz ∠AOB, [OD bisectoarea ∠COB, [OE semidreapta opusă semidreptei [OD şi [OF bisectoarea unghiului ∠AOE. Dacă m(∠AOF)=46°30', determinați: m(∠AOB), m(∠BOC) şi m(∠EOC).

G.1138. Aflați măsura unghiului dintre bisectoarele a două unghiuri adiacente ştiind că măsura unuia din unghiuri este 40°, iar suplementul celuilalt este cu 60° mai mare decât dublul complementului său.

G.1139. Fie semidreptele [OA, [OB, [OC şi [OD construite în ordinea dată astfel încât OB să fie perpendiculară pe OA iar măsura ∠BOC să fie $\frac{5}{9}$ din măsura unghiului drept.

a) Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ∠AOB şi ∠BOC.

b) Aflați măsura unghiului ∠AOD ştiind că unghiul ∠COD are măsura cu 8°45' mai mare decât complementul ∠BOC.

G.1140. Să se determine numărul maxim de unghiuri care se pot construi în jurul unui punct, ştiind că fiecare din măsurile unghiurilor care se formează este cu 10° mai mare decât precedentul unghi şi măsurile unghiurilor sunt numere întregi.

Probleme selectate şi propuse de Mariana Popa, prof. Băileşti

Clasa a VII-a

G.1141. Arătați că fracția $\frac{8n+5}{5n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi n∈**N**.

G.1142. a) Scrieți sub formă de fracție ordinară numărul 2,3(4); **b)** Calculați $\frac{2}{5}$ din 340.

G.1143. Aflați partea fracționară a numărului x=$\frac{1}{2}-\frac{5}{4}$.

G.1144. Calculați:

a) $5^{-1}+4^{-1}+3^{-1}$; **b)** $(5+0,5+0,05+0,005)\cdot 1000$; **c)** $7-2,5\cdot 3$.

G.1145. Fie ecuația $mx+3=7$, $m\in\mathbf{R}^*$.

a) Aflați soluția ecuației pentru $m=-1$.

b) Aflați valoarea parametrului real m, dacă $x=5$ este soluție a ecuației date.

G.1146. Aflați un număr ştiind că suma dintre triplul său şi sfertul său este egală cu $\frac{26}{5}$.

G.1147. Aflați un număr ştiind că suma dintre opusul său şi $\frac{1}{2}$ este -2^2.

G.1148. Calculați:

a) $\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{72}$; **b)** $2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{5}$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$.

G.1149. Rezolvați următoarele ecuații în **R**:

a) $3x-2=5x+7$; **b)** $5x-\sqrt{18}=\sqrt{32}$; **c)** $\sqrt{3}x+7\sqrt{3}=-\sqrt{27}$

G.1150. Fie numerele: a=$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$ şi $b=\left|-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$. Calculați: $a+b$; $(a+b)^2$; $(a+b)(a-b)$.

G.1151. Într-un paralelogram ABCD, distanța de la vârful A la latura DC este de 5 cm. Aflați distanța de la vârful C la latura AB a paralelogramului.

G.1152. În paralelogramul ABCD avem $[AD]\equiv[DB]$ şi $m(\sphericalangle DAB)=45^0$. Aflați $m(\sphericalangle ADB)$.

G.1153. Într-un triunghi dreptunghi ABC mediana şi înălțimea duse din vârful unghiului drept au lungimile de 5 cm şi respectiv 4 cm. Calculați aria triunghiului ABC.

G.1154. Fie paralelogramul ABCD. Se notează cu M, N, P, Q mijloacele laturilor acestuia. Determinați aria patrulaterului MNPQ ştiind că aria paralelogramului ABCD este egală cu 72 cm^2.

G.1155. În dreptunghiul ABCD, $DE\perp AC$, $E\in(AC)$, AD=3 cm, AC=5 cm, AB=4 cm. Aflați lungimea segmentului DE.

G.1156. Într-un pătrat ABCD, punctul O este intersecția diagonalelor. Aflați aria triunghiului COD ştiind că AB=8 cm.

G.1157. Un romb are un unghi cu măsura de 60^0 şi lungimea diagonalelor mici de 2 cm. Aflați perimetrul rombului.

G.1158. Fie rombul ABCD cu AC=4 cm şi BD=2 cm. Aflați:

a) aria rombului ABCD; **b)** aria triunghiului ABC.

G.1159. Un trapez isoscel ABCD are bazele AB=12 cm şi CD=6 cm, iar măsura unghiului DAB este de 60^0. Calculați perimetrul trapezului.

G.1160. În paralelogramul ABCD, O este punctul de intersecție al diagonalelor. Calculați aria triunghiului AOB ştiind că, aria paralelogramului ABCD este egală cu 56 cm^2.

Probleme selectate şi propuse de Gheorghe Ştefana, prof. Slatina, Olt

Clasa a VIII-a

G.1161. Fie $A=(-3, 2]$ şi $B=[0, 5)$. Aflați: $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\cap\mathbf{N}^*$ şi $B\cap\mathbf{Z}$.

G.1162. Determinați mulțimile A şi B ştiind că A=$\{x\in\mathbf{R}\,\|-2x+3|\le 1\}$ şi

B=$\left\{x \in \mathbf{R} \middle| -1 < \frac{2x+3}{5} + 1 \le 2\right\}$.

G.1163. Calculați:

a) $-5-(-1)+(+3)+(-2)=$

b) $|-3|\cdot|+2|+10:(-2)-(-2)\cdot(-4)=$

c) $(-2)^{100}:(-2)^{98}+\left[(-2)^2\right]^3\cdot(-2)^0-\sqrt{10^2-6^2}=$

d) $\frac{1}{2}:\left[-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=$

e) $\frac{5}{\sqrt{18}}-\frac{3}{\sqrt{8}}+\frac{4}{\sqrt{32}}-\frac{1}{\sqrt{50}}=$

f) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$

G.1164. Efectuați:

a) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}-1)^2=$

b) $(2x+\sqrt{3})^2-(2x-\sqrt{3})^2=$

c) $2xy\cdot(-3x^2y)+(-2xy)^3:(-4y)+(-5x^3y^2)=$

d) $(x+1)(x-1)-(2x-1)^2+(2x+1)^3:(2x+1)=$

e) $(y+1)(y^2-y+2)-(y-1)(y^2+y+2)=$

G.1165. Descompuneți în factori:

a) $x^2-6x+9=$

b) $25x^2+10x+1=$

c) $16x^2-8x=$

d) $(2x-\sqrt{3})^2-(2x+\sqrt{3})^2=$

e) $(x-1)(x^2+2x-3)-(2x-2)(x+1)=$

f) $x^2-7x+6=$

g) $x^4+9=$

G.1166. Fie $a\in\mathbf{R}$ cu proprietatea că $a-\frac{1}{a}=3$. Aflați valoarea expresiei $a^4+\frac{1}{a^4}$.

G.1167. Rezolvați ecuațiile:

a) $2x-1=-5x+13$

b) $\frac{-3x+1}{5}+\frac{x-2}{4}=x+\frac{1}{2}$

c) $(x+3)^2-1=(x-1)^2+4$

d) $\frac{3x^2+6}{x+2}=3$

e) $2\cdot[3-(2x+1)\cdot2]=5(x-1)+4$

f) $|x|=x$

G.1168. Simplificați fracțiile următoare:

a) $\frac{x^2-3x}{2x-6}$

b) $\frac{(3x-2)^2\cdot(2x+1)^5}{(2x+1)^4\cdot(3x-2)^3}$

c) $\frac{2x^4+2x^3-x^2-x}{3x(x+1)^2}$

d) $\frac{4x^3+4x^2+x}{4x^2-1}$

G.1169. Se consideră expresia $E(x)=\frac{4x^2+12x+9}{8}\cdot\left(\frac{5}{2x+3}+\frac{2}{3-2x}+\frac{2x+9}{4x^2-9}\right)$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia nu este definită.
b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
c) Rezolvați inecuația $E(x)\le 0$.

G.1170. **a)** Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x)=4x^2-4x+5$.
b) Demonstrați că $|x|\ge x$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

G.1171. Pătratul ABCD și dreptunghiul ABEF sunt situate în plane diferite.
a) Determinați dreapta de intersecție a planelor (ACE) și (BDF) și

demonstrați că aceasta este paralelă cu planele (BCE) şi (FCE).

b) Demonstrați că planele (BCE) şi (ADF) sunt paralele.

G.1172. Fie tetraedrul ABCD iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD] și [DA].

a) Demonstrați că $BD \parallel (MQP)$.

b) Demonstrați că dacă MNPQ este dreptunghi, atunci $AC \perp BD$.

G.1173. Fie ABCD un tetraedru oarecare astfel încât lungimile segmentelor [AB], [AC] şi [AD] sunt invers proporționale cu numerele 15, 10 şi 6. Considerăm punctele $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ şi $P \in [AD]$ astfel încât lungimile segmentelor [AM], [AN] şi [AP] să fie direct proporționale cu numerele 2, 3 şi 5.

a) Demonstrați că planele (MNP) şi (BCD) sunt paralele.

b) Demonstrați că centrele de greutate ale triunghiurilor MNP şi BCD şi punctul A sunt coliniare.

G.1174. Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=10 cm şi AD=5 cm. Pe diagonala [BD] se ia punctul E astfel încât 3BD=2ED. În punctul E se ridică o perpendiculară pe planul dreptunghiului pe care se ia punctul M astfel încât ME=6 cm.

a) Aflați distanța de la punctul C la planul (MDB).

b) Aflați măsura unghiului dintre planele (MAD) şi (BCD).

G.1175. Fie D un punct situat pe perpendiculara ridicată pe planul triunghiului ABC în centrul său de greutate. Demonstrați că:

a) Dacă $DC \perp AB$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

b) Dacă în plus $CG=\frac{CB\sqrt{3}}{3}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

G.1176. Se consideră triunghiul ABC cu AB=a, $AC=a\sqrt{2}$ şi $BC=a\sqrt{3}$. Fie P mijlocul înălțimii din A, iar M şi N proiecțiile punctului P pe laturile [AB] respectiv [AC]. În A se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia punctul E astfel încât $AE=a\sqrt{2}$. Se cere:

a) Distanța de la punctul E la dreapta MN. **b)** Unghiul dintre planele (EBC) şi (ABC).

G.1177. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDMNPQ cu AB=8 cm şi BC=6 cm. Aflați:

a) Distanțele de la M la laturile dreptunghiului.

b) Tangenta unghiului format de dreapta MC cu planul (ABC).

G.1178. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu $VA=6\sqrt{2}$ cm şi AB=6 cm.

a) Calculați distanța de la punctul B la planul (VDC).

b) Aflați valoarea sinusului unghiului dintre muchia [VB] şi planul (VDC).

G.1179. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 12 cm şi 4 cm, iar măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei mari este de 60^0.

a) Calculați lungimea muchiei laterale a trunchiului.

b) Aflați tangenta unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei mai.

G.1180. Fie ABCDEFA'B'C'D'E'F' un trunchi de piramidă hexagonală regulată.

a) Calculați măsura unghiului format de muchia laterală a trunchiului cu planul bazei mari ştiind că AB=6 cm, A'B'=3 cm şi AA'=6 cm.

b) Demonstrați că planele (ABA') şi (BCB') nu pot fi perpendiculare.

Probleme selectate şi propuse de Ionuț Ivănescu, prof. Craiova

Clasele IX-XII

Clasa a IX-a

L.961. Rezolvați ecuația: $\{x\}^3 = [x]^3 + x^{2n+1}$.

L.962. Se considera şirul $\{x_n\}_{n>}$, cu $x_1=2$ şi $x_2=3$, iar pentru n>1, $x_n=3x_{n+1}-2x_n$. Demonstrați prin inducție matematică că $x_n=1+2^{n-1}$. Studiați monotonia şirului.

L.963. Determinați mulțimea $M=\left\{(x,y) \middle| x,y \in \mathbf{Z}, x^2-4xy+6y^2=8\right\}$

L.964. Rezolvați ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=9$

L.965. Se considera predicatul: P(x,m): „$(m+6-m^2)x^2+(m^2+2m-5)x+1-m>0$”.
Menționați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate:

- $\exists m\in\mathbf{R}$, $\exists x\in\mathbf{R}$, p(x, m)
- $\exists m\in\mathbf{R}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, p(x, m)
- $\forall m\in\mathbf{R}$, $\exists x\in\mathbf{R}$, p(x, m)
- $\forall m\in\mathbf{R}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, p(x, m)

L.966. Rezolvați ecuația: $(x-1)^2(x-2)^2+3=0$.

L.967. Fie a, b$\in$**R** cu $a\neq b\neq c\neq a$. Arătați că dacă a+b+c=2010, atunci

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=2010$$

Ileana Dinu şi Maria Ionescu, prof. Craiova

L.968. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n^2}, \forall n\in\mathbf{N}$. Să se arate că dacă există m$\in$**N** astfel încât $a_m=1$, atunci $a_n=1$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Gheorghe Stoica, prof.Petroşani

L.969. Demonstrați că orice cub al unui număr rațional se poate scrie ca sumă a trei cuburi de numere raționale. *Ionuț Ivănescu, prof. Craiova*

L.970. Rezolvați în **R** ecuația: $\frac{8x^7}{x^8+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$

Virginia Grigorescu, prof. Craiova

L.971. Dacă a, b, c, d, e>0 atunci:

$$\sqrt{\frac{a+b+c+d}{e}}+\sqrt{\frac{b+c+d+e}{a}}+\sqrt{\frac{c+d+e+a}{b}}+\sqrt{\frac{d+e+a+b}{c}}+\sqrt{\frac{e+a+b+c}{d}}\geq 10$$ *D.M.*

D.M.Bătinețu-Giurgiu, prof. Bucureşti

L.972. Fie ABCDEFG un heptagon regulat. Demonstrați că are loc egalitatea: $AD^2-AB^2=AD\cdot AC$. *Ionuț Ivănescu, prof.Craiova*

L.973. Să se determine patru numere în progresie aritmetica ştiind că suma lor este 48, iar raportul dintre produsul termenilor extremi şi produsul celorlalți termini este $\frac{27}{35}$.

L.974. Se dau numerele a=–3 şi b=12. Să se insereze între a şi b cinci numere care împreună cu a şi b să formeze o progresie aritmetică.

L.975. Să se verifice dacă există o progresie geometrică: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ pentru care trei termini consecutivi verifică relația: $a_k-5a_{k-1}+6a_{k-2}=0$.

L.976. Să se calculeze: **a)** $\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=$ **b)** $\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}-\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=$

L.977. Fie triunghiul ABC , D, E, F, mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB]. Să se demonstreze că pentru orice punct din spațiu O are loc relația: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$

L.978. Să se arate că dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică atunci $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ sunt în progresie aritmetică. Reciproca este adevărată?

L.979. Să se arate că dacă a, b, c, d sunt în progresie geometrică atunci are loc relația: $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.

L.980. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Probleme selectate şi propuse de Daniela Beldea, prof.Băileşti

Clasa a X-a

L.981. Ordonați crescător numerele:

a) $a=\sqrt{721}, b=\sqrt[3]{9}; c=4$; **b)** $a=\log_2 17$, $b=\sqrt[4]{255}, c=\log_{\frac{1}{8}} 3$

L.982. Calculați: $\dfrac{\left(5^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{2}{5}}\right)^{10}}{125\cdot 7^{\log_5 625}}$.

L.983. Aduceți la forma cea mai simplă numerele:
E=$\sqrt{125}+\sqrt{500}-\sqrt{6075}+\sqrt{7203}+\sqrt{245}$ şi F=$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}+\sqrt[3]{1029}$.

L.984. Determinați domeniul maxim de definiție al funcției: $f(x)=\log_2\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x^2-2x}}$.

L.985. Calculați:

a) $\log_3 14+\log_9 144-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{28}$;

b) $\log_2 125+\log_{\frac{1}{2}} 75+3\log_2\dfrac{1}{15}-\log_{\sqrt[3]{2}} 10$.

L.986. Demonstrați că dacă a, b, c$\in$(0, 1), atunci are loc inegalitatea: $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geq 3$

L.987. Exprimați numărul $\log_{15}45$ în funcție de $a=\log_3 5$.

L.988. Exprimați numărul $\log_{24}2$ în funcție de $x=\log_{120}3$ şi $y=\log_{120}5$.

L.989. Rezolvați ecuațiile:

a) $3^x+3^{x+2}+3^{x+3}=111$; **b)** $2^x+2^{-x}=\dfrac{17}{4}$;

c) $6(4^x+9^x)=13\cdot 6^x$; **d)** $x^{\log_5 x^2}+x^{\log_5 x}=30$;

e) $\log_5(\log_2(x^2+4x))=1$.

L.990. Demonstrați că dacă a, b, c$\in$(1, ∞), atunci are loc inegalitatea:

$\log_{ab}c+\log_{bc}a+\log_{ca}b \geq \frac{3}{2}$

L.991. a) Demonstrați că oricare ar fi numerele reale a, b, c, d inegalitatea $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+ac+bd+cd$ este adevărată. Studiați cazul de egalitate.

b) Rezolvați ecuația: $4^x+16^x+25^x+49^x=8^x+10^x+28^x+35^x$.

L.992. Determinați valorile parametrului real m pentru care numărul: $z=(m^2-4m+3)i^{43}+(9-m^2)i^{23}+(2m^2-7m+3)i^{17}+(3^m-12)i^{12}+i^{10}-1$ este real.

L.993. Calculați modulele următoarelor numere complexe:

$z_1=24-7i$, $z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{23}$, $z_3=\left(\sqrt{7+\sqrt{5}}+i\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^8$, $z_4=\left(\frac{7-24i}{-20+15i}\right)^{2009}$.

L.994. Dacă $z_1, z_2 \in C$, arătați că $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z1|^2+|z_2|^2\right)$.

L.995. Scrieți sub formă trigonometrică numerele complexe:

$z_1=-\sqrt{3}+i, z_2=(1+i)^{23}, z_3=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{46}}{(-1+i)^{45}}, z_4=\frac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{14}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}}$.

L.996. Determinați rădăcinile de ordinul al patrulea ale următoarelor numere complexe:

a) -1; **b)** $-1-i\sqrt{3}$; **c)** $8-8i\sqrt{3}$; **d)** $81-81i$.

L.997. Rezolvați ecuațiile:

a) $2|z|+3z=19-12i$; **b)** $z^2-4z+5=0$; **c)** $z^6+35z^3+216=0$.

L.998. Arătați că dacă $z \in C - \mathbf{R}$, $u \in C - \{1\}$ şi $|u|=1$, atunci $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbf{R}$.

L.999. Arătați că dacă $z_1, z_2, z_3 \in C$, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1, z_1z_2z_3 \neq -1$, atunci numărul $N=\frac{(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)}{1+z_1z_2z_3}$ este real.

L.1000. Fie $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $1+\varepsilon+\varepsilon^2$, ε^{2009} şi $1+\varepsilon^4+\varepsilon^8+\varepsilon^{12}+\ldots+\varepsilon^{128}$.

Probleme selectate şi propuse de Raluca Ciurcea, prof. Craiova

Clasele XI-XII

L.1001. Fie $\varepsilon \in G \setminus \{1\}$ unde $G=\{z \in C / z^3=1\}$ şi matricele

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & \varepsilon & 1\\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Să se calculeze A^2, A^3, A^4.

b) Să se arate că A este inversabilă şi să se calculeze A^{-1}.

c) Să se rezolve ecuația matriceală $YA=B$.

L.1002. a) Calculați determinantul $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & b\end{vmatrix}$.

b) Se consideră operația algebrică „*” definită prin: a*b=D+1, $\forall a\in(1, \infty)$.
Să se arate că oricare ar fi a, $b\in(1, \infty)$ avem $a*b\in(1, \infty)$.
c) Determinați $e\in(1, \infty)$ pentru care a*e=e*a=a, $\forall a\in(1, \infty)$.

L.1003. a) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n\geq 2$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n\geq 2$. **c)** Fie $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculați A^{20}.

L.1004. Fie $M=\left\{A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}, x\in\Re\right\}$

a) Arătați că $(\forall)$ $A_x, A_y\in M$ avem că $A_x\cdot A_y\in M$.
b) Determinați $A_e\in M$ astfel încât $A_x\cdot A_e=A_x$, $(\forall)$ $A_x\in M$.
c) Determinați $A_y\in M$ astfel încât $A_y\cdot A_{y'}=A_e$.

L.1005. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AB+BA. **b)** Să se demonstreze că $(A+B)^n=A^n+B^n$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

L.1006. Să se rezolve ecuația matriceală $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

L.1007. Pe mulțimea $G=(2, \infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.
a) Arătați că (G, *) este grup comutativ.
b) Determinați toate izomorfismele $f:\mathbf{R}\to G$ de forma $f(x)=e^{\alpha x}+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ în grupurile ($\mathbf{R}$, +) şi (G, *).

Admitere Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică din Craiova, 2003

L.1008. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbf{Q}, a^2+b^2=1\right\}$. Să se arate că:

a) G împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.
b) Dacă a, $b\in\mathbf{Q}$, $b\neq -1$ şi $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, atunci $A\in G$ dacă şi numai dacă există $r\in\mathbf{Q}$ astfel încât $a=\frac{2r}{1+r^2}$ şi $b=\frac{1-r^2}{1+r^2}$.
c) Grupul G are o infinitate de elemente.

Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică din Bucureşti, 2007

L.1009. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & t & 3 \\ t & -1 & t \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, t, $m\in\mathbf{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care matricea A este inversabilă oricare ar fi $t\in\mathbf{R}$.

c) Pentru m=0 şi t=1, să se calculeze A^{-1}.

d) Pentru t=1 să se afle valorile lui m pentru care sistemul $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admite soluții nenule.

Admitere Facultatea de Matematică - Informatică din Craiova, 2004

L.1010. Fie $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-3+3i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2, A^3. **b)** Fie $G=\{A^n / n\in\mathbf{N}^*\}$. Să se arate gă (G; ·) este grup comutativ.

Admitere Facultatea de Matematică - Informatică din Timişoara, 2004

L.1011. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3n^4}{2n^3+3n+1}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)}$

L.1012. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcției f.

b) Fie a>0 şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0=a$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

L.1013. a) Să se determine m, $n\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+m, x\leq 2 \\ nx-2, x>2 \end{cases}$ să fie derivabilă pe **R**.

b) Pentru m şi n determinate la punctul a), determinați mulțimea primitivelor funcției f.

L.1014. a) Calculați: $\int\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\,dx, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați primitivele funcției $f:[1, 4]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$.

L.1015. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x+1, x\leq 0 \\ \frac{x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}, x>0 \end{cases}$.

a) Arătați că f admite primitive pe **R**.
b) Determinați constantele reale a, b, c, d pentru care are loc relația:

$$\frac{x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{ax+b}{x^2+2}+\frac{cx+d}{(x^2+2)^2}.$$

c) Determinați o primitivă a lui f.

L.1016. Se consideră funcția f:**R**→**R** $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, x\le -1 \\ 2+x, x>-1 \end{cases}$. Să se arate că f admite primitive pe **R** şi să se determine o primitivă F cu proprietatea $F(2)=\frac{3}{2}$.

L.1017. Se consideră suma $S_n(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$, $x\in$ **R**, $n\in$ **N**.

a) Să se calculeze $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Să se determine $x\in$ **R** pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ există şi este finită.

Admitere Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică din Craiova, 2007

L.1018. Fie a şi b două numere reale. Se defineşte funcția: f:**R**→**R**, $f(x)=\begin{cases} ax^3+b, x<0 \\ \frac{a+b-1}{2}, x=0 \\ bx+a-1, x>0 \end{cases}$.

a) Să se arate că f este continuă dacă şi numai dacă b=a–1.
b) Să se arate că f este derivabilă dacă şi numai dacă a=1 şi b=0.

Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică din Bucureşti, 2008

L.1019. Fie şirul de numere reale $x_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$, $n\in$ **N***. Să se studieze:

a) Monotonia şirului $(x_n)_n$. **b)** Mărginirea şirului $(x_n)_n$. **c)** Convergența şirului $(x_n)_n$.

Admitere Facultatea de Matematică şi Informatică din Bucureşti, 2008

L.1020. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{2n+1}$ şi integralele:

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx \text{ şi } I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx, \forall n\ge 1,\ n\in\mathbf{N}.$$

a) Să se calculeze I_1, I_2. **b)** Să se demonstreze că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $\forall$ $n\in$ **N**, $n\ge 2$.

c) Să se arate că $1\le\frac{I_n}{I_{n+1}}\le\frac{n+1}{n}$, $\forall$ $n\in$ **N***.

d) Folosind inducția matematică, arătați că:

$I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$, $\forall$ $n\in$ **N***.

e) Verificați că $(x_n)^2=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$, $\forall$ $n\in$ **N*** şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Probleme propuse de Cătălin Cristea, prof.Craiova