

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"SFERA" EDIȚIA a VI-a, BĂILEȘTI, 04.04.2009

prezentare de Gabriel Tica

Inspectoratul Școlar Județean Dolj, Casa Corpului Didactic Dolj, Liceul "Mihai Viteazul" Băilești și redacția revistei de matematică "Sfera" au organizat la data de 4 aprilie 2009 Concursul Interjudețean de Matematică "Sfera", ediția a VI-a, care se adresează elevilor din clasele III-X. La această ediție au participat școli din județele Dolj, Olt, Gorj și Hunedoara. Comisia de organizare a fost formată din domnul prof. univ. dr. George Vraciu de la Facultatea de Matematică - Informatică a Universității din Craiova, președintele concursului, prof. Gabriel Tica, coordonatorul concursului și domnul prof. Dan Panait, director al Liceului "Mihai Viteazul" din Băilești.

Subiectele au fost alcătuite de o comisie formată din profesorii Gabriel Tica (Băilești), Cătălin Cristea (Craiova), Nicolae Ivășchescu (Craiova), Doina Firicel, Marian Firicel (Calafat), Emilia Costea (Timișoara) și Cezar Ozunu (Daneți).

Simultan s-a desfășurat Sesiunea de comunicări metodicco-științifice "Matematica modernă-între clasic și actual", care se adresează profesorilor de matematică și învățătorilor. Sesiunea a fost prezidată de domnul prof. univ. dr. George Vraciu, împreună cu domnul inspector școlar de matematică Nicolae Radu, domnul prof. Nicole Miu, din partea SSMR- filiala Dolj și domnul profesor Victor Dudău, din partea C.C.D. Dolj.

În continuare vă prezentăm subiectele propuse și lista laureaților la aceasta ediție.

CLASA a III-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Sunt un număr de trei cifre. Cu numărul 247 nu am nici o cifră comună; cu numărul 389 am două cifre comune: una plasată identic, cealaltă nu; cu numărul 561 am o cifră comună, identic plasată; cu numărul 362 am două cifre comune, identic plasate. Cine sunt eu?

- a) 863 b) 683 c) 368 d) 836

2. Pe un pod trec niște rațe: una în fața celorlalte, două în urma ei, una încheie șirul de rațe, două în fața ei, și una la mijloc între două din ele. Câte rațe trec râul?

- a) 3 b) 6 c) 9 d) 5

3. 5 caiete costă 10 lei, adică cu 2 lei mai mult decât costul a 4 creioane. Câți lei costă un creion?

- a) 4 b) 2 c) 12 d) 14

4. Diferența dintre cel mai mare număr natural scris cu trei cifre și cel mai mic număr natural scris tot cu trei cifre este numărul:

- a) 898 b) 968 c) 886 d) 899

5. Care este numărul natural care verifică relația $(a + 3) + (a - 3) = 10$?

- a) 8 b) 6 c) 5 d) 4

Partea a II- a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvarea corectă.

1. Cu o cantitate de 36 litri de lapte se pot umple 9 bidoane galbene, iar cu trei sferturi dintr-un bidon galben se poate umple o jumătate de bidon roșu. În câte bidoane roșii ar încapa întreaga cantitate de lapte?

2. Un copil are 9 ani. Peste 3 ani mama lui va avea de 4 ori vârsta de acum a copilului, iar bunica de două ori vârsta de acum a mamei. De câte ori este acum mai în vârstă bunica decât nepotul ?

Probleme propuse de prof. Emilia Costea

Școala cu clasele I-VIII nr. 21 „Vincențiu Babeș”, Timișoara

Clasa a IV-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Dan merge la tenis în fiecare zi, Ana la 2 zile și Alex la 3 zile. Dacă astăzi sunt toți, peste câte zile vor fi din nou împreună?
a) 3 b) 5 c) 6 d) 9
- M-am născut în anul MCMLXXXIX. În ce an voi împlini 20 de ani?
a) 2008 b) 2009 c) 2010 d) 2011
- Suma dintre un număr, dublul lui, triplul și împătritul lui este cel mai mic număr natural de trei cifre. Care este numărul?
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11
- Am un săculeț cu 7 bile albe și 6 bile violete. Ce număr minim de bile trebuie să extrag fără să mă uit pentru a fi sigur că în săculeț pot rămâne cel puțin câte trei bile de aceeași culoare?
a) 5 b) 6 c) 7 d) 10
- Într-un grup sunt 19 persoane. Doar 12 poartă ochelari și doar 13 au ceas. Câte persoane au și ceas și poartă și ochelari?
a) 12 b) 25 c) 19 d) 6

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

- O stradă are, pe o parte, case numerotate cu numere impare de la 1 până la 33, iar pe cealaltă parte numărul caselor numerotate cu numere pare este de trei ori mai mare. Știind că această numerotare începe de la numărul 2 ce număr are casa situată exact la mijlocul șirului de case cu numere pare?
- Mă gândesc la un număr. Îl înjumătățesc și apoi măresc rezultatul cu 2. Dublez noul rezultat, și ce obțin măresc cu 2. Noul rezultat îl măresc de 2 ori și ce am obținut măresc cu 2. Dublez noul rezultat, apoi îl măresc cu 2. Măresc noul rezultat cu 2 și dacă împart la 20 ultimul rezultat obțin numărul la care m-am gândit. La ce număr m-am gândit?

*Probleme propuse de prof. Emilia Costea
Școala cu clasele I-VIII nr.21 „Vicențiu Babeș”, Timișoara*

Clasa a V-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Unul din divizorii numărului $A=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+49\cdot 50$ este:
a) 3 b) 11 c) 13 d) 17
- Fracția $\frac{2008n+1}{2009n+1}$, $n \in \mathbf{N}$ se simplifică cu:
a) 97 b) 41 c) Nu se simplifică d) 191
- Unul din divizorii numărului:
 $A=(3^{m+1}\cdot 2^{m+3}+6^m\cdot 9+2^{m+3}\cdot 3^m)(32\cdot 6^n+2^n\cdot 3^{n+2}+6^{n+1}+2^{n+1}\cdot 3^n)$ este:
a) 2007 b) 2008 c) 2009 d) 2010
- Patru cărți, două stilouri și două penare costă cât o carte, cinci stilouri și cinci penare și cât patru cărți și cinci penare. Cel mai ieftin dintre cele trei obiecte este:
a) cartea b) penarul c) au același preț d) stiloul
- Dacă $2x+3y=30$, $x, y \in \mathbf{N}$, atunci cea mai mare valoare a lui $x+y$ este:
a) 15 b) 14 c) 18 d) 12.

Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu, Craiova

Clasa a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive astfel ca $x + y = 6 \cdot xy$, valoarea minimă a sumei $5x + 5y$ este :

- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{10}{3}$

2. În trapezul isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, E și F sunt mijloacele diagonalelor [AC] respectiv [BD], $EF = 12\sqrt{3}$ cm, ar $BC = 9\sqrt{6}$ cm. Lungimea înălțimii trapezului ABCD este :

- a) $6\sqrt{6}$ cm b) $9\sqrt{3}$ cm c) $3\sqrt{6}$ cm d) 12 cm

3. Fie x, y, z numere raționale astfel ca $xy + yz + zx = 3$. Numărul $x^2 + y^2 + z^2$ nu poate avea valoarea :

- a) 3 b) 2 c) 10 d) 19

4. Câte perechi de numere întregi verifică relația: $|x-1| + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2} |y-2|$

- a) 4 b) 2 c) 1 d) 3

5. Se consideră dreptunghiul ABCD și punctul E situat pe dreapta AD (D între A și E), astfel ca $AE = 7 \cdot DE$

Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, raportul ariilor dreptunghiului ABCD și a triunghiului BOE este :

- a) 49 b) 42 c) 50 d) 24

Probleme propuse de prof. Marian Firicel, Calafat

PARTEA a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2, scrieți pe lucrare rezolvarile complete.

1. Stabiliți dacă există numere prime x, y, z , astfel încât : $x^2 + y^2 + z^2 = 2004$

Prof. Liliana Niculescu-Revista, „Sfera” nr. 6

2. Se consideră pătratul ABCD, E este simetricul lui A față de B, iar F un punct pe segmentul (BE) încât să fie adevărată egalitatea $BF(AB + AC) = AB^2$. Dacă bisectoarea unghiului BAC intersectează BC în S și pe CF în T, se cere :

- a) Arătați că segmentele [AS] și [CF] sunt congruente.
b) Demonstrați că dreptele SF și DB sunt paralele. *Prof. Marian Firicel, Calafat*

Clasa a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă $a+b+c=3$ și $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci $\min\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ este egal cu:

- a) 3; b) 9; c) $\frac{1}{3}$; d) $\sqrt{3}$.

2. Ecuația $[x] + [2x] + [3x] = 8$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x , este verificată de orice număr real din intervalul:

- a) $\left[\frac{9}{6}; \frac{13}{6}\right)$; b) $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$; c) $\left[\frac{9}{6}; \frac{10}{6}\right)$; d) $\left[\frac{9}{6}; \frac{19}{12}\right)$.

3. Dacă $(x+y-3)^2 + (1-x-y)^2 = 2$, atunci valoarea expresiei $2x+2y-3$ este egală cu :

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea $f(2-x) + 3 \cdot f(x) = 5x + 4 + f(1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Atunci $f(3)$ este egal cu:

- a) 3; b) 8; c) -3; d) 9.

5. Fie piramida patrulateră regulată VABCD în care $AB=12\text{cm}$, iar $VO=8\text{ cm}$, unde $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Atunci sinusul unghiului determinat de planele (VBC) și (VAD) este egal cu:

- a) 0,96 ; b) 0,5 ; c) 0,35 ; d) 0,75.

Probleme propuse de prof. Cezar Ozunu, Daneți și prof. Gabriel Tica, Băilești

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

1. Să se demonstreze că: $\frac{a^3 + 8b^3 + 1}{a^2 + 4b^2 + 1} \geq \frac{a + 2b + 1}{3}$, $\forall a, b \in (0, +\infty)$

Prof. Cezar Ozunu, Daneți, Sfera nr. 13

2. Fie tetraedrul ABCD în care au loc egalitățile: $2 \cdot DA^2 + BC^2 = 2 \cdot DB^2 + AC^2 = 2 \cdot DC^2 + AB^2$

a) Dacă $DD' \perp BC$ și $AA' \perp BC$, unde $A', D' \in BC$, iar M este mijlocul lui [BC], arătați că:

$$\frac{DC^2 - DB^2}{AC^2 - AB^2} = \frac{MD'}{MA'}$$

b) Dacă $DE \perp (ABC)$, $E \in (ABC)$, arătați că E este mijlocul lui [OH], unde O și H sunt respectiv centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului ABC.

Prof. Gabriel Tica, Băilești

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin:

$$x_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}, \forall n \geq 1. \text{ Dacă } x_n = \frac{43 \cdot 45}{44^2}, \text{ atunci } n \text{ este:}$$

- a) 1 b) 43 c) 44 d) 45

2. Partea întregă a numărului $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ este:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

3. Dacă N este numărul de rădăcini reale ale ecuației $[x+2]\{x\} = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \{2x\}$,

atunci:

- a) N=0 b) N=1 c) N=2 d) N≥3.

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1=1$ și $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$, $\forall n \geq 1$.

Atunci $\sum_{k=1}^{100} a_k$ este:

- a) 171700 b) 170000 c) 343400 d) 343403.

5. Fie triunghiul ABC și punctele $P \in (BC)$, $Q \in (AP)$ astfel încât

$\frac{BP}{PC} = \alpha$, $\frac{AQ}{QP} = \beta$. Dacă $CQ \cap AB = \{R\}$, valoarea raportului $\frac{AR}{RB}$ este:

- a) $\frac{\alpha}{\beta}$ b) $\frac{\alpha+1}{\beta}$ c) $\frac{\beta}{\alpha+1}$ d) $\frac{\beta+1}{\alpha+1}$

Probleme propuse de prof. Cătălin Cristea, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admite o soluție reală x_0 , atunci ecuația $x^2 - (ax_0 - 2)x + bx_0^2 + 2 = 0$ admite soluții reale.

Prof. Cătălin Cristea, Craiova, Revista „Sfera” nr.13

2. Fie x, y, z numerele reale strict pozitive. Să se demonstreze că:

$$4x^2y + 2y_4z + z^8x - 8(xy + yz + zx) + (7x + 4y + 6z) \geq 0.$$

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie: $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbf{Q}$. $S = a + b$ atunci:

a) $S = 5$ b) $S = 4$ c) $S = 3$ d) $S = -5$

2. $S = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + ni^{n-1}$ atunci:

a) $S = \frac{ni^{n+1} - (n+1) \cdot i^n + i}{2}$ b) $S = \frac{-(n+1)i^{n+1} - n + i}{2}$

c) $S = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$ d) $S = \frac{(n+1)i^{n+1} + ni - i}{2}$

3. Fie: $S = \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin y)$ cu $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

a) $S = x + y$ b) $S = \pi + (x + y)$ c) $S = \pi - (x + y)$ d) $S = 2\pi + (x + y)$

4. 24 dintre elevii unei clase participă la cel puțin una dintre olimpiadele de matematică, informatică sau fizică. Câți elevi au participat la toate cele 3 olimpiade știind că: 14 au participat la matematică, 10 la fizică, 6 la informatică, 8 la matematică și fizică, 5 la matematică și informatică, 1 la fizică și informatică.

a) 3 b) 4 c) 2 d) 8

5. Fie: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{3^x - 4}{3^x + 2}$. Atunci mulțimea valorilor lui f este

a) \mathbf{R} b) $(-2, 1)$ c) $(0, \infty)$ d) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

Probleme propuse de prof. Doina Firicel, Calafat

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.

1. Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ atunci: $\log_{ab^3c} 3^a + \log_{bc^3a} 3^b + \log_{ca^3b} 3^c \geq \frac{3}{7}$.

Prof. D.M. Băținețu-Giurgiu, București, Revista „Sfera” nr. 13

2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Notăm

$$S = \frac{1}{a^6 + 2b^3 + 3c^2} + \frac{1}{b^6 + 2c^3 + 3a^2} + \frac{1}{c^6 + 2a^3 + 3b^2}.$$

a) Dacă $abc = 1$ demonstrați că $S \leq \frac{1}{2}$;

b) Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ demonstrați că $S \geq \frac{9}{12 + 2(a^6 + b^6 + c^6)}$.

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

LAUREAȚII CONCURSULUI:

Nr. crt.	Numele și prenumele	Școala de unde provine	Clasa	Premiul
1	Mitroi Mădălina	Liceul "Mihai Viteazul" - Băilești - DJ	3	I
2	Scînteie Mihaela-Valentina	C.N. "George Coșbuc" - Motru - GJ	3	I
3	Stănăil Elena-Mădălina	Sam "N. B. Locusteanu" - Leu - Dj	3	I
4	Ispas Ștefan	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	3	II
5	Novacovici Eunice	C.N. "George Coșbuc" - Motru - GJ	3	II
6	Bistriceanu Adelina	Școala Nr. 2 "C-tin Gerota" - Calafat - Dj	3	III
7	Rîjniță Ioana	C.N. "George Coșbuc" - Motru - GJ	3	III
8	Matei Cezara	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	3	III
1	Burcu Lucian	Școala cu clasele I-VIII Nr. 2 „Traian” - Craiova - Dj	4	I
2	Costea Maria	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	4	II
3	Tudorică Felix	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	4	II
4	Albu Răzvan	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	4	III
5	Datcu Gabriel	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	4	III
6	Vața Anca-Marinela	Școala cu clasele I-VIII - Giurgiuța - Dj	4	III
1	Dima Ioana	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	5	I
2	Șerban Camelia	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	5	II
3	Dima Eustatiu	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	5	III
4	Trașcă Daniel	Școala Nr. 2 "C-Tin Gerota" - Calafat - Dj	5	III
1	Beldea Bogdan	Școala cu clasele I-VIII Nr. 5 - Băilești - Dj	6	I
2	Băețică Irina	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	6	II
3	Dimulescu Cosmin	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	6	II
4	Pîrvu Ștefania Emilia	Școala cu clasele I-VIII Filiași - Dj	6	III
5	Stănășel Ancuța	Sam "N. B. Locusteanu" - Leu - Dj	6	III
1	Șerban Andra	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3 - Corabia - Ot	7	I
2	Cristache Alexandru	Școala Nr. 30 "Mihai Viteazul" - Craiova - Dj	7	II
3	Antonie Mădălina	Școala Nr. 2 "C-Tin Gerota" - Calafat - Dj	7	III
1	Cîmpeanu Antonia Rebeca	Școala cu clasele I-VIII Filiași - Dj	8	I
2	Mălin Ștefan	Școala cu clasele I-VIII Nr. 5 - Băilești - Dj	8	II
3	Ștecan Veronica	Școala Nr. 34 - Craiova - Dj	8	III
1	Mateescu Andreea	Liceul "Mihai Viteazul" - Băilești - Dj	9	I
2	Manea Ionuț	Liceul "Mihai Viteazul" - Băilești - Dj	9	II
3	Roșu Mihai	Liceul "Mihai Viteazul" - Băilești - Dj	9	II
4	Girgel Manolica	Liceul "Independența „ - Calafat - Dj	9	III
5	Minea Elis-Nicoleta	Liceul "Independența „ - Calafat - Dj	9	III
1	Carauleanu Bogdan	C.N. "Frații Buzești" - Craiova -Dj	10	I
2	Prună Radu	C.N. "Frații Buzești" - Craiova -Dj	10	II
3	Mănoiu Stanomir-Andrei	Liceul de Inf. "Șt. Odobleja" -Craiova -Dj	10	III
4	Turcu Ștefan	Liceul "Independența" - Calafat - Dj	10	III