

O.I.M. 2009, BREMEN, GERMANIA

Rubrică realizată de Gabriel Tica, prof. Băilești

**Enunțuri:**

**Problema 1.** Fie  $n$  un număr natural nenul și fie  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) numere naturale nenule distincte din mulțimea  $\{1, \dots, n\}$  astfel încât  $n$  divide  $a_i(a_{i+1}-1)$  pentru  $i=1, \dots, k-1$ . Arătați că  $n$  nu divide  $a_k(a_1-1)$ .

**Problema 2.** Fie  $ABC$  un triunghi în care centrul cercului circumscris este  $O$ . Punctele  $P$  și  $Q$  se află pe laturile  $CA$ , respectiv  $AB$ , în interiorul acestora. Fie  $K, L$  și  $M$  mijloacele segmentelor  $BP, CQ$ , respectiv  $PQ$ , și fie  $\Gamma$  cercul circumscris triunghiului  $KLM$ . Arătați că dacă dreapta  $PQ$  este tangentă cercului  $\Gamma$ , atunci  $OP=OQ$ .

**Problema 3.** Fie  $s_1, s_2, s_3, \dots$  un șir strict crescător de numere naturale, astfel încât subșirurile  $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$  și  $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$  sunt ambele progresii aritmetice.

Demonstrați că șirul  $s_1, s_2, s_3, \dots$  este el însuși o progresie aritmetică.

**Problema 4.** Fie  $ABC$  un triunghi cu  $AB=AC$ . Bisectoarele unghiurilor  $\angle CAB$  și  $\angle ABC$  taie laturile  $BC$ , respectiv  $CA$  în punctele  $D$ , respectiv  $E$ . Fie  $I$  centrul cercului înscris în triunghiul  $ADC$ . Se știe că  $\angle BEI=45^\circ$ . Determinați toate valorile posibile pentru  $\angle CAB$ .

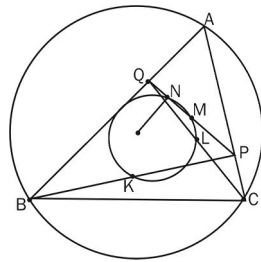
**Problema 5.** Determinați funcțiile  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , astfel încât pentru orice  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , numerele  $a, f(b)$  și  $f(b+f(a)-1)$  pot fi lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat.

**Problema 6.** Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numere naturale nenule distincte și fie  $M$  o mulțime formată din  $n-1$  numere naturale nenule diferite de  $s=a_1+a_2+\dots+a_n$ . O lăcustă sare către dreapta, în lungul axei reale, pornind din punctul  $O$ , făcând  $n$  salturi cu lungimile  $a_1, a_2, \dots, a_n$  într-o anumită ordine. Demonstrați că lăcusta poate alege ordinea salturilor în așa fel încât niciunul dintre punctele din  $M$  să nu fie atinse la capătul vreunui salt.

Vă prezentăm soluțiile la trei dintre problemele propuse.

**Problema 1.** (Soluția autorului, Ross Atkins, Australia)

Fie  $n=pq$  astfel încât  $p|a_1$  și  $q|a_2-1$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $n$  divide  $a_k(a_1-1)$ . Deoarece  $q|a_2-1$  rezultă  $(q, a_2)=1$ . Dar  $q|a_2(a_3-1)$  de unde rezultă  $q|a_3-1$ . Analog se obține  $q|a_i-1, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Deoarece  $p|a_1$  și  $q|a_1-1$  rezultă  $(p, q)=1$ . Deoarece  $p|a_1$  rezultă  $(p, a_1-1)=1$ . Dar  $p$  divide  $a_k(a_1-1)$  de unde rezultă  $p|a_k$ . Analog se obține  $p|a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Deci pentru orice număr  $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  avem că  $p|a_i$  și  $q|a_i-1$ , unde  $n=pq$ , iar  $p$  și  $q$  sunt prime între ele. Contradicție!



**Problema 2.** (Soluția autorului, Serghei Berlov, Rusia)

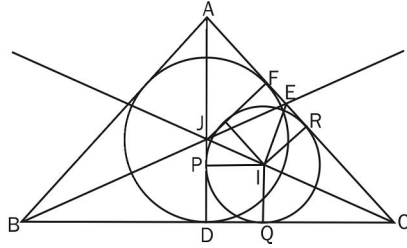
Dreapta  $PQ$  este tangentă la cercul  $\Gamma$  dacă și numai dacă  $\angle MLK = \angle QML$ . Deoarece  $MK \parallel AB$ , rezultă că  $\angle AQP = \angle MLK$ . Deoarece  $MK$  și  $ML$  sunt linii mijlocii în  $\triangle PQB$  respectiv  $\triangle PQC$ , rezultă  $\angle PAQ = \angle LMK = \alpha$ .

Dar  $\triangle APQ$  este asemenea cu  $\triangle MKL$ . De aici obținem:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{BQ}{PC} \text{ sau } AP \cdot PC = AQ \cdot BQ. \text{ Aplicăm teorema lui Stewart}$$

în  $\triangle ABO$  pentru ceviana  $OQ$  și obținem  $OQ^2 = R^2 \cdot \frac{BQ}{AB} + R^2 \cdot \frac{AQ}{AB} - AQ \cdot BQ = R^2 - AQ \cdot BQ$ . Analog  $OP^2 = R^2 - AP \cdot PC$ , de unde rezultă  $OP = OQ$ .

**Problema 4** (Soluția autorilor Jan Vonk (Belgia), Peter Vandendriessche (Belgia))



Fie  $J$  centrul cercului înscris în triunghiul  $ABC$ , iar  $F$  punctul în care acest cerc este tangent la  $AC$ . Notăm cu  $P, Q$ , respectiv  $R$ , punctele în care cercul înscris în triunghiul  $ADC$  este tangent la laturile  $JD, DC$ , respectiv  $CF$ . Același cerc este tangent la  $FJ$  în punctul  $S$ . Deoarece  $IRFS$  este pătrat, avem că  $m(\angle IFJ) = m(\angle CFI) = 45^\circ$ . În cazul în care  $F = E$  va rezulta  $BA = BC$ , iar în acest caz triunghiul  $ABC$  va fi echilateral, deci

$m(\angle BAC) = 60^\circ$ . Dacă  $F \neq E$ , egalitatea  $m(\angle IEJ) = m(\angle IFJ) = 45^\circ$  arată că punctele  $J, I, E$  și  $F$  se găsesc pe un cerc. De aici rezultă că:  $45^\circ = m(\angle CFI) = m(\angle CJE) =$

$$m(\angle JBC) + m(\angle JCB) = \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2}.$$

Dar,  $m(\angle A) = 180^\circ - m(\angle B) - m(\angle C)$ , de unde se obține că  $m(\angle A) = 90^\circ$ .